Topoi come 'ponti' unificanti: una morfogenesi matematica

Olivia Caramello

April 30, 2021

Piano del seminario

- Il tema dell’unificazione in matematica
- I topoi come ‘ponti’ unificanti
- La dualità tra gli invarianti dei topoi e le loro manifestazioni: una morfogenesi matematica
- L’idea di ‘ponte’
- Simmetrie e completamenti
- Prospettive future

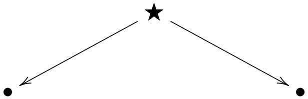
Unificazione e ‘ponti’ in matematica

- La matematica consiste in diverse branche (e.g., l’algebra, la geometria, l’analisi, la topologia, la teoria dei numeri, etc.), ciascuna delle quali è caratterizzata da un suo proprio linguaggio e insieme di tecniche.
- Con il tempo, diverse connessioni tra settori distinti sono state scoperte, portando in alcuni casi alla creazione di autentici ‘ponti’ tra branche differenti (pensate ad esempio alla geometria analitica).
- L’importanza dei ‘ponti’ tra settori differenti risiede nel fatto che essi rendono possibili trasferimenti di conoscenze e di metodi tra di essi, il che permette di formulare, ed eventualmente risolvere, problemi posti nel linguaggio di un certo settore utilizzando tecniche proprie di altri settori.
- La logica matematica e la teoria dei topoi si rilevano essere strumenti fondamentali per studiare in modo sistematico e rigoroso le relazioni tra teorie matematiche differenti.

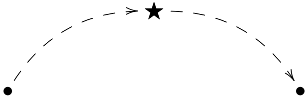
Il concetto di unificazione

Possiamo distinguere due diversi tipi di unificazione.

- Unificazione 'statica' (attraverso una generalizzazione): due concetti sono visti come istanze di uno più generale:



- Unificazione 'dinamica' (attraverso una costruzione): due oggetti sono collegati tra loro attraverso un terzo oggetto (normalmente costruito a partire da ciascuno di essi separatamente), che svolge la funzione di 'ponte' permettendo un trasferimento di informazione tra di essi.



Il trasferimento di informazione risulta dal processo di 'traduzione' di proprietà dell'oggetto 'ponte' (rispettivamente costruzioni su di esso) in termini di proprietà dei due oggetti (rispettivamente costruzioni su di essi).

Teorie unificanti per la matematica

In relazione ai tipi di unificazione introdotti sopra, possiamo dire che:

- La teoria degli insiemi e la teoria delle categorie forniscono un'unificazione statica della matematica, essenzialmente di tipo linguistico. In effetti, ciascuna di queste teorie fornisce un quadro formale astratto e globale nel cui linguaggio la maggior parte della matematica può essere formulata.

  Si noti che, per quanto offrano un modo per esprimere ed organizzare la matematica in un singolo linguaggio, tali teorie non forniscono metodi per un effettivo trasferimento di conoscenza tra settori distinti.
- Al contrario, i topoi, in quanto strutture su cui gli invarianti matematici fondamentali sono naturalmente definiti, permettono di collegare efficacemente differenti teorie matematiche tra di loro, e di studiare una data teoria attraverso una molteplicità di punti di vista differenti, offrendo quindi un approccio più sostanziale al problema di 'unificare la matematica'.

La "nozione unificatrice" di topos

In questo seminario il termine 'topos' significherà sempre 'topos di Grothendieck'.

"C'est le thème du topos qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde" où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques".

A. Grothendieck

A partire dalla mia tesi di dottorato, mi sono occupata di sviluppare una teoria e delle tecniche che permettano di cominciare a dare corpo alla visione di Grothendieck, fondandomi sulla nozione di topos classificatore introdotta dai logici.

I topoi comme ‘ponti’ unificanti

Questa teoria, introdotta nel testo programmatico “*The unification of Mathematics via Topos Theory*” del 2010, permette di sfruttare la flessibilità tecnica inerente alla nozione di topos - più precisamente la possibilità di rappresentare un topos in una moltitudine di modi diversi - per costruire dei ‘ponti’ utili a unificare e trasferire nozioni, idee e risultati tra teorie matematiche distinte.

Negli ultimi anni, oltre a condurre alla risoluzione di problemi aperti da molto tempo in logica categoriale, queste tecniche hanno generato diverse applicazioni non-triviali in differenti campi della matematica, ma molto resta ancora da fare affinché i topoi diventino uno strumento chiave universalmente utilizzato per lo studio delle teorie matematiche e delle loro relazioni.

Di fatto, questi ‘ponti’ si sono rivelati utili non solo per collegare tra loro teorie matematiche differenti ma anche per studiare una data teoria matematica all’interno di un determinato campo.

Alcune applicazioni

- Teoria dei modelli (interpretazione e generalizzazione topos-teoretica del teorema di Fraïssé)
- Teoria della dimostrazione (nuovi sistemi dimostrativi per le teorie geometriche)
- Algebra (generalizzazione topos-teoretica del formalismo Galoisiano)
- Topologia (interpretazione/generazione di dualità di tipo Stone e Priestley)
- Analisi funzionale (risultati sugli spettri di Gelfand e le compattificazioni di Wallman)
- Gruppi reticolati e MV-algebre (articoli con la mia (ex) studentessa di dottorato A.C. Russo)
- Strutture cicliche introdotte da A. Connes e C. Consani (lavoro sulle "teorie cicliche" con il mio (ex) studente di master N. Wentzlaff)
- Geometria algebrica (generalizzazione dei motivi di Nori con L. Barbieri-Viale e L. Lafforgue, e approccio logico al problema dell'indipendenza da ℓ)

I topoi classificatori

Negli anni '70, grazie al lavoro di diversi logici/categoristi, tra cui in particolare M. Makkai e G. Reyes, è stato scoperto che:

- Ad ogni teoria matematica $\mathbb{T}$ (di una certa forma molto generale) si può associare canonicamente un topos $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$, detto il topos classificatore della teoria, che rappresenta il suo 'cuore semantico'.
- Due teorie matematiche hanno lo stesso topos classificatore (a meno di equivalenza) se e solo se hanno lo stesso 'cuore semantico', ovvero se e solo se esse sono indistinguibili da un punto di vista semantico; tali teorie sono dette Morita-equivalenti.
- Reciprocamente, ogni topos è il topos classificatore di una qualche teoria.
- Un topos può quindi essere visto come un rappresentante canonico di classi di equivalenza di teorie modulo Morita-equivalenza.

Topoi come ‘ponti’

- La nozione di Morita-equivalenza formalizza in molte situazioni la sensazione di ‘guardare la stessa cosa da diversi punti di vista’ o ‘costruire uno stesso oggetto in modi diversi’, il che spiega la sua ubiquità in matematica.
- In effetti, molte importanti dualità ed equivalenze in matematica possono essere naturalmente interpretate come risultanti da Morita-equivalenze.
- Due teorie bi-interpretabili (ovvero tra le quali esiste un ‘dizionario’) sono Morita-equivalenti ma, significativamente, il converso non è vero.
- Inoltre, la nozione di Morita-equivalenza cattura il dinamismo intrinseco al concetto stesso di teoria matematica: in effetti, una teoria da sola genera un numero infinito di Morita-equivalenze.
- La teoria dei topoi stessa è una fonte primaria di Morita-equivalenze. In effetti, rappresentazioni differenti dello stesso topos possono essere interpretate come Morita-equivalenze tra differenti teorie matematiche.

Topoi come 'ponti'

- L'esistenza di differenti teorie con lo stesso topos classificatore si traduce, a livello tecnico, nell'esistenza di differenti rappresentazioni dello stesso topos.
- Gli invarianti topos-teoretici possono quindi essere usati per trasferire informazioni da una teoria all'altra:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathscr{E}_{\mathbb{T}} \simeq \mathscr{E}_{\mathbb{T}'} \arrow[dr, dashed, bend left] & \\ \mathbb{T} \arrow[ur, dashed, bend left] & & \mathbb{T}' \end{tikzcd}$$

- Il trasferimento di informazioni avviene esprimendo un dato invariante in termini delle differenti rappresentazioni del topos.

Topoi come 'ponti'

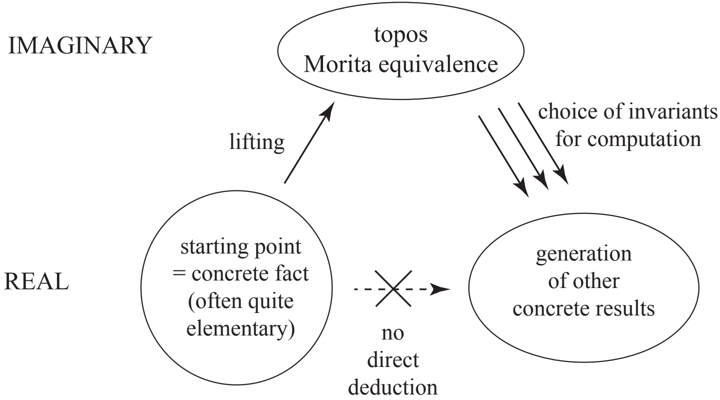
- Differenti proprietà (rispettivamente costruzioni) nel contesto di teorie classificate dallo stesso topos vengono a essere interpretate come differenti *manifestazioni* di un'*unica* proprietà (rispettivamente costruzione) che vive al livello dei topoi.
- Ogni invariante topos-teoretico si comporta in questo contesto come una sorta di 'paio di occhiali' che permette di discernere dell'informazione nascosta dell'equivalenza di Morita considerata; differenti invarianti permettono di mettere in luce e trasferire differenti informazioni.
- Questa metodologia è tecnicamente efficace in quanto la relazione tra un topos e le sue rappresentazioni è molto naturale, il che permette di trasferire invarianti attraverso differenti rappresentazioni (e quindi, attraverso differenti teorie) in maniera tecnicamente fattiva benché in generale non-triviale.

Una morfogenesi matematica

- L'ambiguità essenziale data dal fatto che un topos è associato in generale ad un'infinità di teorie o siti differenti permette di studiare le relazioni tra diverse teorie, e quindi le teorie stesse, utilizzando i topoi come 'ponti' tra queste differenti presentazioni.
- Ogni invariante topos-teoretico genera un'autentica morfogenesi matematica, risultante dalla sua espressione in termini delle differenti rappresentazioni dei topoi, che dà luogo in generale a proprietà concretamente completamente diverse e apparentemente scollegate.
- L'esplorazione matematica è quindi in un certo senso 'rovesciata' in quanto guidata dalle Morita-equivalenze e dagli invarianti topos-teoretici, a partire dai quali uno procede per estrarre informazioni concrete rilevanti per le teorie che intende studiare.

Ponti immaginari

Possiamo schematicamente rappresentare il modo di ottenere risultati concreti applicando la tecnica dei 'ponti' nella forma di un'ascesa seguita da una discesa tra due livelli, quello 'reale' della matematica concreta e quello 'immaginario' dei topoi:



La dualità tra 'reale' e 'immaginario'

- Il passaggio da un sito (o una teoria) al topos associato può essere visto come una forma di 'completamento' attraverso l'aggiunta di 'immaginari' (nel senso della teoria dei modelli), che materializza il potenziale contenuto nel sito (o teoria).
- La dualità tra il mondo (relativamente) non strutturato delle presentazioni delle teorie e il mondo massimamente strutturato dei topoi è di grande rilevanza in quanto, da un lato, la 'semplicità' e concretezza delle teorie o siti rende facile il manipolarli mentre, d'altro canto, i calcoli sono molto più semplici nel mondo 'immaginario' dei topoi in virtù della loro struttura interna estremamente ricca e del fatto che gli invarianti vivono a questo livello.

Come studiare le relazioni tra oggetti diversi?

- Per trasferire informazione tra due entità legate da una certa relazione, è fondamentale identificare (e, se possibile, classificare) le proprietà di tali entità che sono invarianti rispetto a questa relazione.
- A seconda dei casi, questo può essere un problema trattabile oppure di grande complessità.
- In effetti, accade spesso che due oggetti o situazioni differenti non possano essere collegati tra loro in modo diretto e che sia necessario adottare un nuovo punto di vista per metterli in relazione.
- D'altra parte, una relazione tra due oggetti è in generale un'entità astratta, che vive in un contesto ideale che normalmente è *diverso* da quello in cui vivono i due oggetti.
- È quindi di importanza cruciale il fatto di identificare degli oggetti più concreti che possano incarnare gli invarianti (o sui quali gli invarianti siano naturalmente definiti) tra i nostri due oggetti e servire da 'ponti' per trasferire dell'informazione tra loro.

Oggetti *ponte*

- Possiamo pensare ad un oggetto *ponte* che collega due oggetti a e b come ad un oggetto u che può essere 'costruito' a partire da ciascuno dei due oggetti a e b indipendentemente e che quindi ammette due 'rappresentazioni' $f(a)$ e $g(b)$ legate da una certa relazione di equivalenza $\simeq$:

$$\begin{tikzcd} & f(a) \simeq u \simeq g(b) \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

- Il trasferimento di informazione risulta dal processo di 'traduzione' di proprietà di (risp. costruzioni su) l''oggetto ponte' in proprietà di (risp. costruzioni su) i due oggetti utilizzando le due rappresentazioni differenti dell'oggetto ponte.

Uno o molteplice?

- Un oggetto può essere pensato come la collezione di tutte le sue *presentazioni*. Tra tali presentazioni sussiste una fondamentale relazione di equivalenza: quella di presentare il medesimo oggetto.
- Ogni oggetto può quindi giocare il ruolo di 'ponte' tra sue differenti presentazioni.
- Noi 'accediamo' ad un oggetto attraverso la molteplicità delle sue presentazioni, ma gli oggetti stessi sono di fatto classi di equivalenza di presentazioni.

Generazione da una sorgente

- Ogni oggetto, in virtù della sua stessa esistenza, genera un fascio di percezioni (o 'presentazioni') coerenti tra loro.

  Viceversa, in presenza di relazioni di coerenza tra percezioni differenti di uno stesso fenomeno, è scientificamente ragionevole (in un'ottica 'minimalista') supporre l'esistenza di qualcosa che 'generi' tali percezioni e possa essere quindi considerato ontologicamente responsabile per le relazioni di coerenza esistenti tra di esse.

- Il linguaggio delle categorie è particolarmente adatto per esprimere relazioni di coerenza. Più specificamente, la nozione di fascio esprime robuste relazioni di coerenza di tipo "locale-globale" permettendo di definire entità 'globali' a partire da insiemi di dati 'locali' tra loro compatibili.

- Che cos'è la 'realtà' se non un fascio di percezioni coerenti?

Il paradigma di Yoneda

- Dato un oggetto c di una categoria $\mathscr{C}$, un elemento generalizzato di c è una freccia in $\mathscr{C}$ con codominio c.
- Vi è un funtore
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, c) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$
canonicamente associato a c, detto il funtore rappresentato da c, che associa a ogni oggetto a di $\mathscr{C}$ l'insieme degli elementi generalizzati di c di dominio a (ovvero le frecce da a a c) e agisce sulle frecce nel modo ovvio.
- Un funtore (controvariante su $\mathscr{C}$ a valori negli insiemi) si dice rappresentabile se è isomorfo ad un funtore della forma $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, c)$ per qualche oggetto c di $\mathscr{C}$.
- L'immersione di Yoneda identifica un oggetto c, a meno di isomorfismo, con il funtore rappresentabile corrispondente $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, c)$, ovvero con il funtore dei suoi elementi generalizzati.
- L'immersione di Yoneda induce un'equivalenza tra un dato topos e la categoria dei fasci su se stesso (relativamente alla topologia canonica)!

Unificazione e morfogenesi

- I 'ponti' abbondano in matematica e altri campi della scienza, e possono essere considerati 'responsabili' (almeno astrattamente) della genesi delle cose e della natura della realtà così come la percepiamo.
- In effetti, ogni volta che abbiamo un invariante, possiamo provare ad utilizzarlo per costruire 'ponti' che collegano le sue diverse manifestazioni.
- Un 'ponte' è precisamente l'espressione, e in un certo senso anche la *spiegazione*, del legame che esiste tra le differenti manifestazioni di uno stesso invariante.
- Pensate ad esempio alla nozione di *energia* in fisica come ad un invariante: l'energia in sé è un concetto molto astratto, ma le diverse forme in cui essa si manifesta possono essere molto concrete (si pensi all'energia termica, all'energia elettromagnetica, all'energia meccanica, etc.); inoltre, il fatto di poter trasformare, come in un 'ponte', una forma di energia in un'altra è qualcosa di molto importante.

Ideale = reale?

- L'idea di ponte è un'astrazione (come quella di invariante) ma, sorprendentemente, molti ponti che sorgono nell'ambito delle scienze sperimentali possono essere identificati con veri e propri oggetti 'fisici' (pensate, ad esempio, in biologia, al DNA o, in astronomia, alle stelle attorno cui ruotano i pianeti).
- In effetti, le situazioni più illuminanti sono quelle in cui questi oggetti ideali ammettono rappresentazioni 'concrete', che ci permettono di contemplare la dinamica della 'differenziazione dall'unità' in modo più diretto ed efficace.
- La teoria dei topoi permette di materializzare un grande numero di oggetti ideali, e quindi di servire da ponti tra una grande varietà di contesti differenti.
- In generale, cercare rappresentazioni 'concrete' di concetti immaginari può condurre alla scoperta di ambienti matematici maggiormente ricchi di 'simmetrie' in cui i fenomeni possono essere descritti in modi naturali e unificanti.

Contingente e universale

- Ogni linguaggio o punto di vista è parziale (o 'bucato') ed è soltanto attraverso l'integrazione di tutti i punti di vista che si arriva a cogliere l'essenza delle cose.
- Non c'è un linguaggio universale che sarebbe migliore (nell'assoluto) di tutti gli altri; ogni punto di vista mette in luce certi aspetti nascondendone altri e può rivelarsi più conveniente di un altro in relazione ad un certo obiettivo.
- L'universalità deve quindi essere ricercata non al livello dei linguaggi ma a quello degli oggetti 'ideali' sui quali sono definiti gli invarianti.
- Occorre quindi ragionare a due livelli, quello degli invarianti (e degli oggetti su cui essi sono definiti) e quello delle loro manifestazioni nel contesto delle situazioni 'concrete', e studiare la dualità tra questi due livelli, una dualità che può essere pensata come quella tra un 'senso' e i differenti modi di esprimerlo.

Completamenti ed invarianti

- Per mettere in relazione tra loro linguaggi o punti di vista differenti bisogna in generale ‘completarli’ a degli oggetti che realizzino esplicitamente l’implicito nascosto in ciascuno di loro.
- È al livello di questi oggetti completati che si manifestano gli invarianti, ovvero le simmetrie, e che possiamo comprendere le relazioni tra i nostri oggetti di partenze grazie ai ponti generati dagli invarianti.
- Il topos classificatore di una teoria, ad esempio, è costruito attraverso un processo di completamento della teoria stessa, rispetto, in un certo senso, a tutti i concetti che essa è potenzialmente in grado di esprimere.
- Grazie alla tecnica dei ‘ponti’, teorie differenti che descrivono uno stesso contenuto matematico vengono messe in relazione fra loro come se fossero frammenti di un unico oggetto, linguaggi parziali che si completano rispecchiandosi gli uni negli altri all’interno della totalità dei punti di vista incarnata dal topos classificatore.

Il programma dei topoi come 'ponti' unificanti

I risultati ottenuti finora mostrano che i topoi possono effettivamente giocare il ruolo di 'ponti' per trasferire informazioni tra differenti teorie matematiche.

Contiamo quindi di proseguire la ricerca in questa direzione per sviluppare ulteriormente il potenziale unificante della nozione di topos. Temi centrali in questo programma saranno:

- studio di dualità o corrispondenze importanti in matematica da un punto di vista topos-teoretico (in particolare, la teoria dei motivi e il programma di Langlands)
- studio sistematico degli invarianti dei topoi in termini delle loro rappresentazioni, e introduzione di nuovi invarianti che catturino aspetti essenziali di problemi matematici concreti
- introduzione di nuove metodologie per generare delle Morita-equivalenze
- interpretazione e generalizzazione di parti importanti della teoria dei modelli (sia classica che moderna) in termini di topoi e sviluppo di una teoria funtoriale dei modelli
- Automazione della tecnica di costruzione dei ponti in modo da ottenere un *proof assistant* capace di generare meccanicamente nuovi risultati all'interno di teorie matematiche formalizzate

Possibili applicazioni in altri settori

Lo sviluppo di queste tecniche unificatrici, e delle idee generali che ad esse sottindendono, è suscettibile di gettare luce anche in ambito extra-matematico, ad esempio in

- Fisica (e.g., analisi e interpretazione di dualità, topoi per la teoria della relatività e la meccanica quantistica)
- Informatica (e.g., semantica dei linguaggi di programmazione e dimostrazione automatica di teoremi)
- Linguistica (e.g., sintassi e semantica dei linguaggi naturali, studi comparativi e teoria della traduzione)
- Filosofia (e.g., metodologia della scienza, ontologia dei concetti matematici)
- Teoria Musicale (e.g., analisi della composizione, dell'interpretazione e dell'esecuzione)

Per approfondire

O. Caramello
Grothendieck toposes as unifying 'bridges' : a mathematical morphogenesis,
di prossima pubblicazione nel libro Springer *Philosophy of Mathematics. Objects, Structures, and Logics*.

O. Caramello
La "notion unificatrice" de topos,
di prossima pubblicazione nel volume *Lectures Grothendieckiennes* dell'École Normale Superieure di Parigi,
disponibile sul mio sito www.oliviacaramello.com.

O. Caramello
Grothendieck toposes as unifying 'bridges' in Mathematics,
Mémoire d'habilitation à diriger des recherches,
Université de Paris 7, 2016,
disponibile sul mio sito www.oliviacaramello.com.

O. Caramello.
Theories, Sites, Toposes: Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges',
Oxford University Press, 2017.