

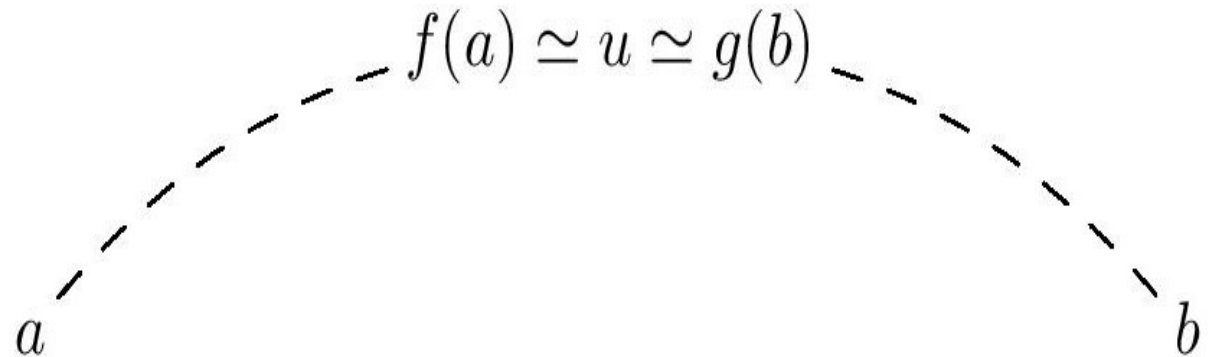
Comment construire des 'ponts' en mathématiques?

Olivia Caramello

(Université de l'Insubrie – Côme, IHÉS et Institut Grothendieck)

Le concept d'objet 'pont'

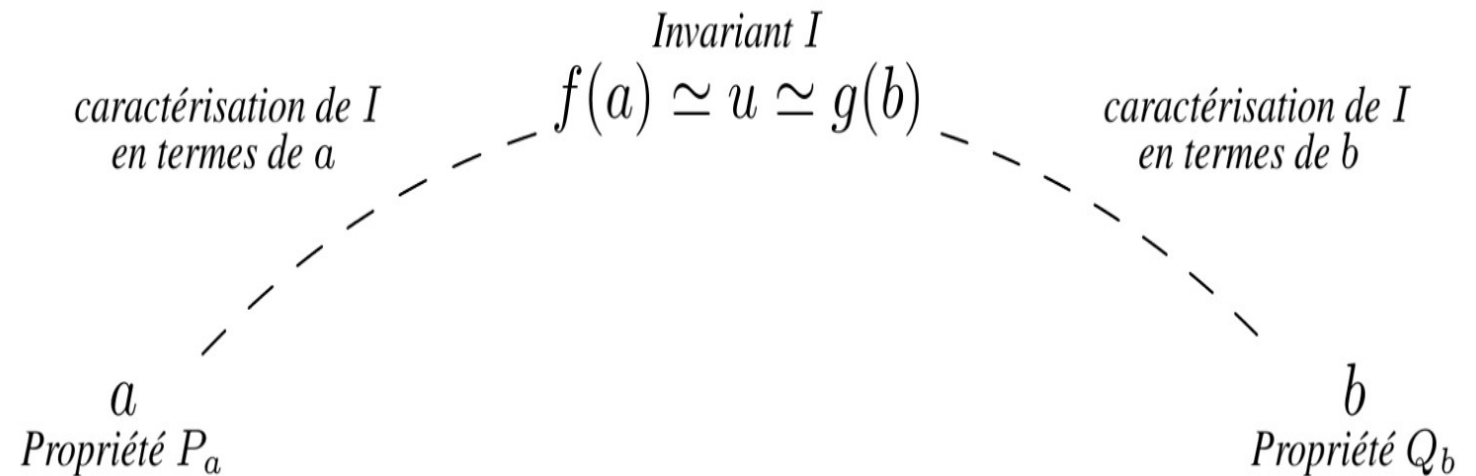
On peut penser à un objet 'pont' reliant deux objets **a** et **b** comme à un objet **u** qui peut être « construit » à partir de n'importe lequel de ces deux objets **a** et **b** et qui admet deux représentations différentes **f(a)** et **g(b)** reliées par une relation d'équivalence $\simeq$, la première représentation étant dans les termes de l'objet **a** et la seconde dans les termes de l'objet **b**.



Invariants et transferts d'information

En présence d'un objet 'pont' **u** reliant deux objets **a** et **b**, on peut réaliser des **transferts d'information** en étudiant comment des **invariants** de l'objet pont **u** (c'est-à-dire des propriétés qui sont invariantes par la relation d'équivalence $\simeq$) s'expriment en termes des objets **a** et **b** via les représentations **f(a)** et **g(b)** de **u** en termes de **a** et **b**.

Ainsi, on obtient des **correspondances** entre des propriétés **P_a** et **Q_b** des objets **a** et **b**, **unifiées** en tant que manifestations différentes de l'invariant **I** dans les contextes de **a** et de **b**.

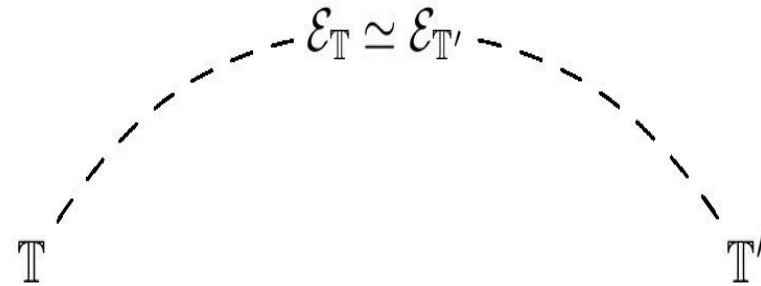


Topos de Grothendieck comme ‘ponts’ unifiants en mathématiques

Les **topos**, espaces abstraits introduits par le grand mathématicien Alexander Grothendieck dans les années soixante, se révèlent des objets extrêmement efficaces pour unifier et réaliser des **transferts d'information** entre différentes théories mathématiques, grâce aux invariants qu'ils supportent.

A chaque théorie $\mathbb{T}$ d'un type très général on peut associer un topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, appelée son **topos classifiant**, qui en incarne le contenu de façon invariante par rapport à ses différentes présentations.

Le topos classifiant d'une théorie peut notamment être utilisé comme un « **pont** » pour transférer de l'information entre cette théorie et une autre théorie ayant le même topos classifiant.



L'ubiquité des 'ponts'

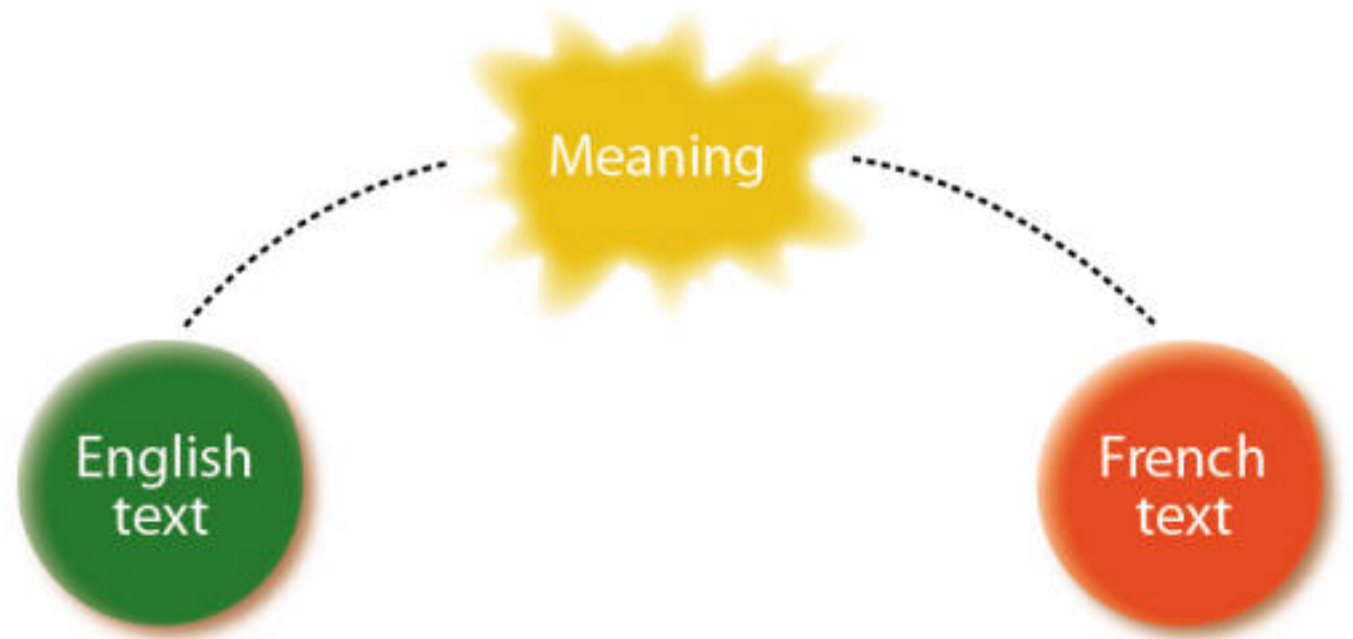
Plus généralement, chaque fois que l'on dispose d'**invariants** par rapports à différentes contextes ou présentations d'un même phénomène, on peut engendrer des '**ponts**' reliant leurs différentes manifestations. Cela donne lieu à une sorte de **morphogenèse**.

A titre d'illustration de l'ubiquité et de l'importance des objets 'pont' dans différents champs de la connaissance, nous discuterons plusieurs **exemples** de 'ponts' dans divers domaines, avant de tirer des conclusions générales sur la nature de ces objets et sur les méthodes que nous pouvons employer pour les identifier.

Traductions en **linguistique**: invariants ou dictionnaires?

Contrairement à une **traduction littérale**, fondée sur l'emploi mécanique d'un **dictionnaire**, une **bonne traduction** doit se fonder sur l'identification d'un ensemble de **propriétés abstraites des textes** que l'on souhaite voir rester **invariantes** dans la traduction, et sur l'utilisation de cet ensemble comme **objet 'pont'** induisant la traduction.

L'invariant le plus évident dans le cadre d'une traduction et la « **signification** », mais on peut souhaiter préserver également d'autres aspects du texte, comme sa « musicalité » ou une certaine métrique...

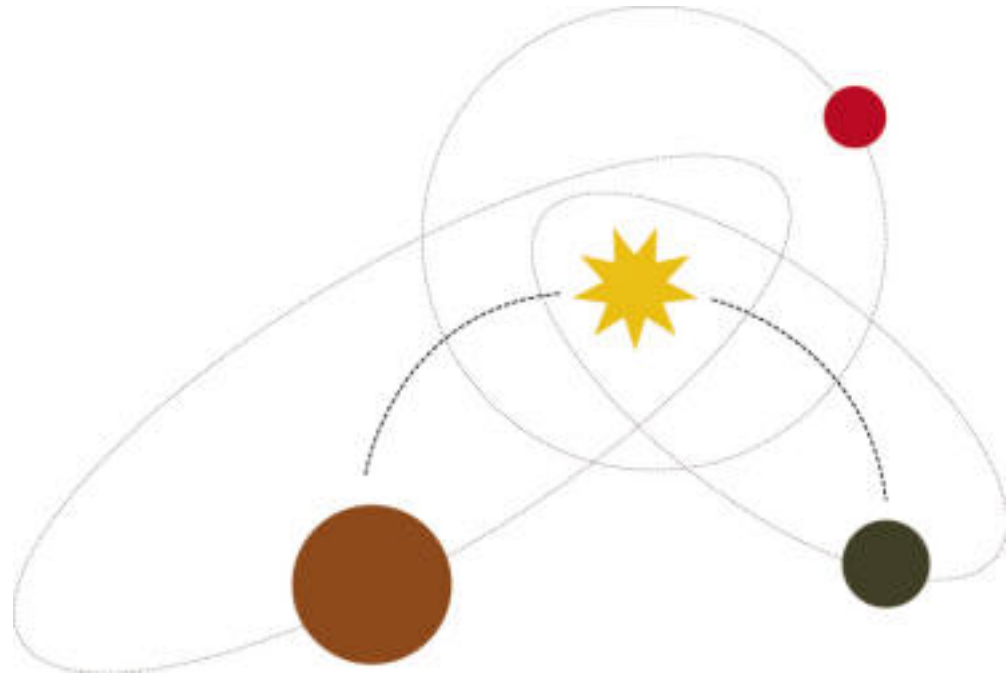


Astronomie: les lois de Kepler et la révolution copernicienne

Les **trois lois de Kepler** expriment l'existence d'**invariants** qui régissent le mouvements des planètes du système solaire.

Ces invariants peuvent être pensés comme des **propriétés abstraites de l'étoile** autour de laquelle tournent les planètes, se manifestant concrètement par la variété de trajectoires effectuées par les différents planètes.

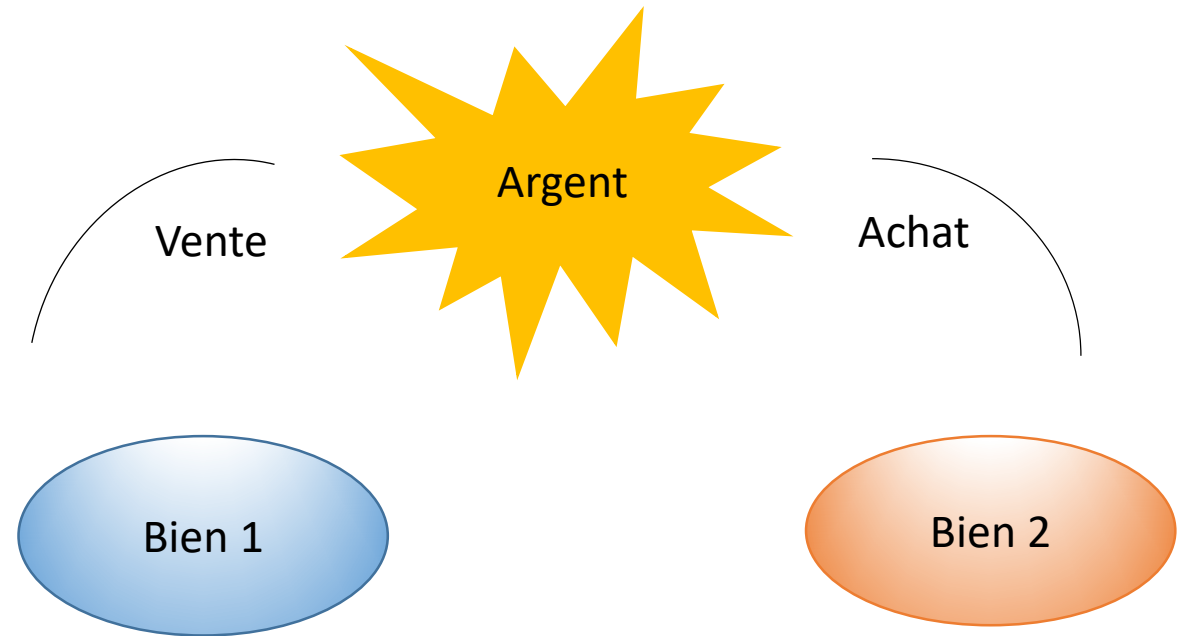
La **révolution copernicienne** a consisté à adopter comme **point de vue privilégié** pour décrire les mouvements des planètes celui fourni par l'objet 'pont', c'est-à-dire le Soleil, plutôt que celui de n'importe quel planète lui tournant autour (comme la Terre).



Économie: l'argent comme un objet 'pont'

L'introduction de l'**argent** à la place du **troc**, qui était le moyen d'échange primitif utilisé par l'humanité, a permis le développement d'une nouvelle discipline : l'**économie moderne**.

En fait, le troc correspond à une façon **directe** d'échanger deux biens (analogue aux traductions littérales induites par un dictionnaire), qui n'est praticable que dans un nombre très limité de cas. Au contraire, l'introduction de l'argent en tant que objet 'pont' permet toute sorte d'échanges entre biens différents.

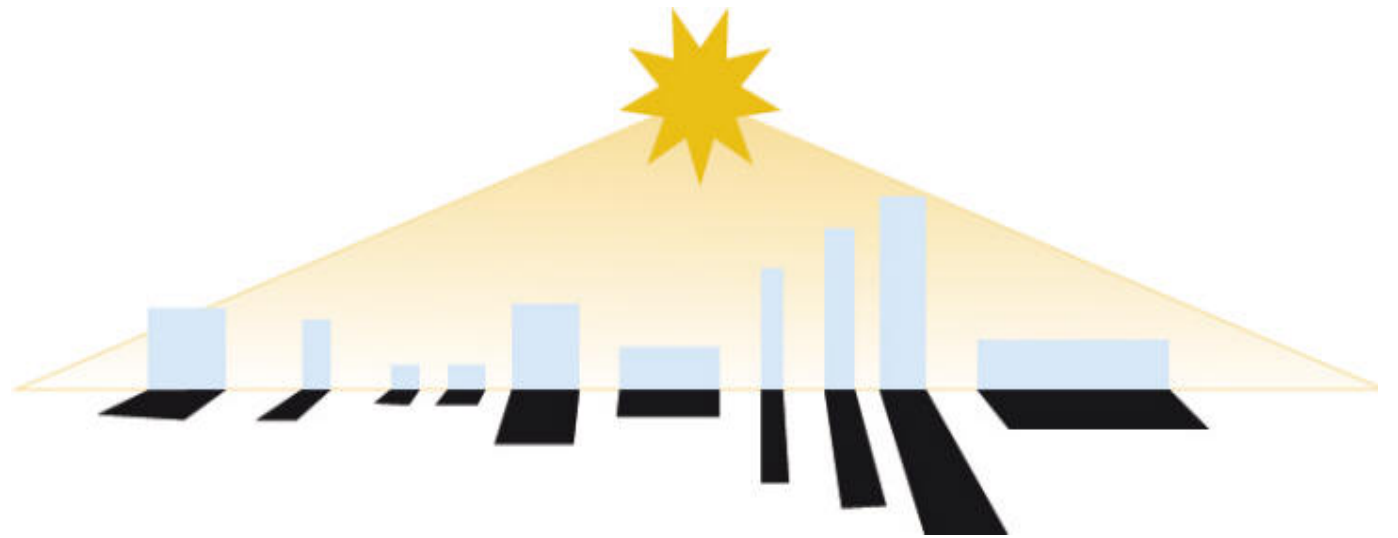


Ontologie: la « réalité » comme ‘pont’

Qu'est-ce que la « **réalité** » ? La réalité est généralement définie comme ce qui existe dans un sens absolu, c'est-à-dire indépendamment des perceptions d'un sujet ou d'un « observateur » particulier.

L'hypothèse qu'une réalité existe est justifiée par l'existence d'un très grand nombre de **relations de cohérence** entre les perceptions individuelles de différents « observateurs » ou instruments de mesure.

La réalité serait donc l'**objet ‘pont’** ontologiquement responsable de l'existence de ces relations de cohérence, les différentes perceptions étant les manifestations différentes de cette unique « réalité » dans le contexte de différents « observateurs ».



Contingent et universel

- Tout langage ou point de vue est partiel (ou « percé ») et ce n'est que par l'intégration de tous les points de vue que l'on peut arriver à saisir l'essence des choses.
- L'universalité doit donc être recherchée non pas au niveau des langages ou points de vue, mais au niveau des objets « idéaux » sur lesquels les invariants sont définis.
- Il faut donc raisonner à deux niveaux, celui « abstrait » des invariants (et des objets 'pont' sur lesquels ils sont définis) et celui de leur manifestations dans le contexte de situations « concrètes », et étudier la dualité qui existe entre ces deux niveaux.

Complétions et symétries

- Pour relier des langues ou points de vue différents, il faut en général les « **compléter** » en des objets qui réalisent *explicitement* l'implicite *caché* dans chacun d'entre eux.
- C'est au niveau de ces objets complétés que les **invariants**, ou les symétries, se manifestent. En effet, ces objets 'pont' fournissent une perspective privilégiée sur les relations entre nos objets de départ, grâce aux **invariants définis sur eux**.
- Ainsi, en mathématiques, différentes théories décrivant le même contenu sont liées comme s'il s'agissait de **fragments** d'un **seul et unique objet**, comme des langages partiels qui se complètent en se reflétant les uns dans les autres dans la « totalité des points de vue » incarné par le topos classifiant.

D'une esquisse à la réalité

Chaque langue, dans sa tentative d'exprimer une réalité qui est beaucoup plus riche, est comparable à une **esquisse**.

Ainsi, le passage d'une expression linguistique à sa signification apparaît comme une sorte de **complétion automatique**, semblable à celle effectuée par notre cerveau lorsque nous observons l'artiste qui dessine une esquisse:



Topos pour l'IA

Le rôle des topos comme espaces incarnant le **contenu sémantique** des théories mathématiques suscite de plus en plus d'intérêt parmi des spécialistes dans **divers domaines de l'Intelligence Artificielle**.

En fait, leur utilisation comme 'ponts' apparaît de grande relevance pour

- développer de **nouveaux protocoles de communication** fondés sur l'information sémantique ;
- améliorer l'efficacité des calculs par le biais des nouveaux modèles computationnels ;
- classer et unifier les **différents manières de décrire et présenter l'information** ;
- automatiser la découverte de **nouveaux résultats** en mathématiques.