La “notion unificatrice” de topos

Olivia Caramello

Università degli Studi dell’Insubria (Como) et IHÉS

6 mars 2018

La “notion unificatrice cruciale” de topos

Dans cet éxposé le terme ‘topos’ signifiera toujours ‘topos de Grothendieck’.

“C’est le thème du topos qui est ce “lit”, ou cette “rivière profonde” où viennent s’épouser la géométrie et l’algèbre, la topologie et l’arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures “discontinues” ou “discrètes”. Il est ce que j’ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une “essence” commune à des situations des plus éloignées les unes des autres provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques”.

A. Grothendieck

Plan de l’exposé

- La nature multiforme des topos
- La réception des topos
- Les topos comme ‘ponts’ : la vision sous-jacente et quelques examples
- Perspectives futures

La nature multiforme des topos

Les topos sont des objets particulièrement multiforme, qui peuvent être étudiés avec profit de plusieurs points de vue différents.

En fait, un topos de Grothendieck peut être vu comme :

- un espace généralisé
- un univers mathématique
- une théorie modulo ‘Morita-équivalence’

Rappelons brièvement chacun de ces différents points de vue.

Topos comme espaces généralisés

- La notion de topos a été introduite par A. Grothendieck au début des années soixante dans le but d’exporter des notions et constructions topologiques ou géométriques dans des contextes où il n’y avait pas d’espaces topologiques au sens strict.
- Grothendieck a réalisé que beaucoup de propriétés importantes des espaces topologiques X peuvent se reformuler naturellement comme des propriétés (invariantes) des catégories $\mathbf{Sh}(X)$ des faisceaux d’ensembles sur les espaces.
- Il définit donc les topos comme des catégories de faisceaux d’ensembles plus générales, en remplaçant l’espace topologique X par une paire $(\mathscr{C}, J)$ consistant en une (petite) catégorie $\mathscr{C}$ et une ‘notion générale de recouvrement’ J sur elle, et en considérant les faisceaux (dans un sens généralisé) sur cette paire :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed] \arrow[d, rightsquigarrow] & \mathbf{Sh}(X) \arrow[d, rightsquigarrow] \\ (\mathscr{C}, J) \arrow[r, dashed] & \mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J) \end{tikzcd}$$

L'idée "enfantine" de topos

"Comme l'idée même des faisceaux (due à Leray), ou celle des schémas, comme toute "grande idée" qui vient bousculer une vision invétérée des choses, celle des topos a de quoi déconcerter par son caractère de naturel, d'"évidence", par sa simplicité (à la limite, dirait-on, du naïf ou du simpliste, voire du "bébête" - par cette qualité particulière qui nous fait nous écrier si souvent : "Oh, ce n'est que ça ! ", d'un ton mi-déçu, mi-envieux ; avec en plus, peut-être, ce sous entendu du "farfelu", du "pas sérieux", qu'on réserve souvent à tout ce qui déroute par un excès de simplicité imprévue. A ce qui vient nous rappeler, peut-être, les jours depuis longtemps enfouis et reniés de notre enfance..."

"Par contre, je ne vois personne d'autre sur la scène mathématique, au cours des trois décennies écoulées, qui aurait pu avoir cette naïveté, ou cette innocence, de faire (à ma place) cet autre pas crucial entre tous, introduisant l'idée si enfantine des topos (ou ne serait-ce que celle des "sites")."

A. Grothendieck

Les topos comme univers mathématiques

Une décennie plus tard, W. Lawvere et M. Tierney découvrirent qu’un topos peut non seulement être vu comme un espace généralisé mais aussi comme un univers mathématique dans lequel on peut faire des mathématiques de la même façon que dans le contexte classique des ensembles (avec la seule exception importante qu’il faut raisonner constructivement).

Cette découverte rendit possible en particulier de :

- Exploiter la ‘flexibilité’ inhérente à la notion de topos pour construire des ‘nouveaux mondes mathématiques’ ayant des propriétés particulières.
- Considérer les modèles de n’importe quelle théorie (du premier ordre) non seulement dans le contexte classique des ensembles mais à l’intérieur de chaque topos, et donc ‘relativiser’ les mathématiques.

Les topos classifiants

L’idée de considerer les topos du point de vue des structures qu’ils classifient remonte à la thèse “*Topos annelés et schemas rélatifs*” de son éleve M. Hakim, où quatre topos utiles en géométrie algébrique sont caracterisés comme les classifiants de certains types d’anneaux.

D’autre part, Grothendieck parle dans SGA 4 des topos classifiants des structures "s’exprimant en termes de limites projectives finies et de limites inductives quelconques" et se pose le problème de la formalisation de celles-ci :

[Les propriétés d’exactitude du foncteur d’image inverse u^* d’un morphisme géométrique de topos $u : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$] assurent que pour toute espèce de structure algébrique Σ dont les données peuvent se décrire en termes de données de flèches entre les ensembles de base et des ensembles déduits de ceux-ci par application répétée d’opérations de limites projectives finies et de limites inductives quelconques, et pour tout "objet de $\mathscr{E}'$ muni d’une structure d’espèce Σ", son image par u^* est munie des mêmes structures. Plutôt que d’entrer dans la tâche peu engageante de donner un sens précis à cet énoncé et de le justifier de façon formelle, nous conseillons au lecteur de l’expliciter et de se convaincre de sa validité pour des espèces de structure telles que celle de groupe, d’anneau, de module sur un anneau, de comodule sur un anneau, de bigèbre sur un anneau, de torseur sous un groupe.

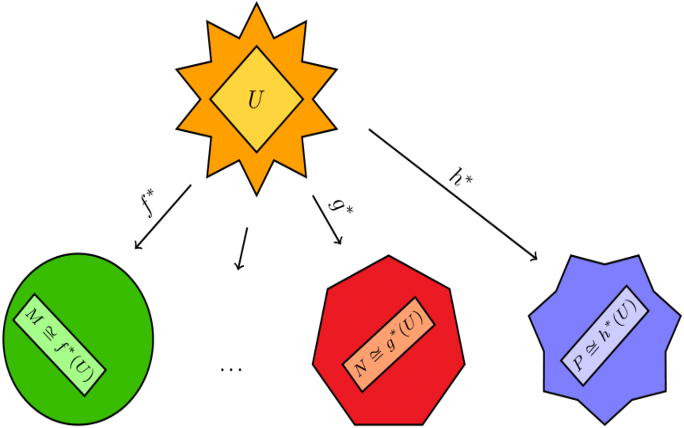
Les topos comme théories modulo ‘équivalence de Morita’

Grâce aux travaux de plusieurs catégoriciens, notamment W. Lawvere, G. Reyes, A. Joyal, M. Makkai, J. Bénabou et J. Cole dans les années ‘70, la "logique géométrique" invoquée par Grothendieck a été définie et il a été montré que :

- A toute théorie géométrique (du premier ordre) $\mathbb{T}$ on peut associer canoniquement un topos $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$, appelé son topos classifiant, qui représente son ‘cœur sémantique’.
- Le topos $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$ est caractérisé par la propriété universelle suivante : pour tout topos de Grothendieck $\mathscr{E}$ on a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Geom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}_{\mathbb{T}}) \simeq \mathbb{T}\text{-mod}(\mathscr{E})$$

naturelle en $\mathscr{E}$, où $\mathbf{Geom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}_{\mathbb{T}})$ est la catégorie des morphismes géométriques $\mathscr{E} \to \mathscr{E}_{\mathbb{T}}$ et $\mathbb{T}$-mod$(\mathscr{E})$ est la catégorie des modèles de $\mathbb{T}$ dans $\mathscr{E}$.



Topos classifiant

Les topos comme théories modulo 'équivalence de Morita'

- Deux théories ont le même topos classifiant (à équivalence près) si et seulement si elles ont le même 'cœur semantique', c'est-à-dire si et seulement si elles sont indistinguables du point de vue sémantique ; deux telles théories sont dites Morita-équivalentes.

- Réciproquement, tout topos est le topos classifiant d'une théorie.

- Donc un topos peut être vu comme un représentant canonique d'une classe d'équivalence de théories modulo Morita-équivalence.

La réception contrariée des topos

Grothendieck se plaint à maintes reprises dans *Récoltes et Semailles* de la mauvaise réception des topos dans la communauté mathématique, qu'il impute essentiellement au manque de vision de ses anciens amis et élevés. Il écrit par exemple :

"J'ai su peu à peu, je ne saurais trop dire comment, que plusieurs notions qui faisaient partie de la vision oubliée, étaient non seulement tombées en désuétude, mais étaient devenues, dans un certain beau monde, objet d'un condescendant dédain. Tel a été le cas, notamment, de la notion unificatrice cruciale de topos, au coeur même de la géométrie nouvelle - celle-là même qui fournit l'intuition géométrique commune pour la topologie, la géométrie algébrique et l'arithmétique - celle aussi qui m'a permis de dégager aussi bien l'outil cohomologique étale et ℓ-adique, que les idées maîtresses (plus ou moins oubliées depuis, il est vrai...) de la cohomologie cristalline. A vrai dire, c'était mon nom même, au fil des ans, qui insidieusement, mystérieusement, était devenu objet de dérision - comme un synonyme de vaseux bombinages à l'infini (tels ceux sur ces fameux "topos", justement, ou ces "motifs" dont il vous rabattait les oreilles et que personne n'avait jamais vus...), de découpage de cheveux en quatre à longueur de mille pages, et de pléthorique et gigantesque bavardage sur ce que, de toutes façons, tout le monde connaissait déjà depuis toujours et sans l'avoir attendu..."

La réception contrariée des topos

“Pendant quinze ans (depuis mon départ de la scène mathématique), l’idée unificatrice féconde et le puissant outil de découverte qu’est la notion de topos, est maintenue par une certaine mode au ban des notions réputées sérieuses. Rares encore aujourd’hui sont les topologues qui aient le moindre soupçon de cet élargissement potentiel considérable de leur science, et des ressources nouvelles qu’il offre.”

“Vue le dédain avec lequel certains de mes ex-élèves (...) se sont plus à traiter cette notion unificatrice cruciale, celle-ci s’est vue condamnée depuis mon départ à une existence marginale. (...) les topos (...) se rencontrent pourtant à tous les pas en géométrie - mais on peut bien sûr fort bien se passer de les voir, comme on s’est passé pendant des millénaires de voir des groupes de symétries, des ensembles, ou le nombre zéro.”

La vision, et l’outil

“L’ensemble des deux séminaires consécutifs SGA 4 et SGA 5 (qui pour moi sont comme un ***seul*** *"séminaire") développe à partir du néant, à la fois le puissant instrument de synthèse et de découverte que représente le* ***langage*** *des topos, et* ***l’outil*** *parfaitement au point, d’une efficacité parfaite, qu’est la cohomologie étale - mieux comprise dans ses propriétés formelles essentielles, dès ce moment, que ne l’était même la théorie cohomologique des espaces ordinaires.”*

“Ces deux séminaires sont pour moi indissolublement liés. Ils représentent, dans leur unité, à la fois la ***vision****, et* ***l’outil*** *- les topos, et un formalisme complet de la cohomologie étale. Alors que la vision reste récusée encore aujourd’hui, l’outil a depuis plus de vingt ans profondément renouvelé la géométrie algébrique dans son aspect pour moi le plus fascinant de tous - l’aspect "arithmétique", appréhendé par une intuition, et par un bagage conceptuel et technique, de nature "géométrique".”*

*“****L’opération "Cohomologie étale"*** *a consisté à* ***discréditer la vision*** *unificatrice des topos (comme du "non sens", du bombinage etc.)... et d’autre part, a* ***s’approprier l’outil****, c’est à dire la* ***paternité*** *des idées, techniques et résultats que j’avais développés sur le thème de la cohomologie étale.”*

Les topos élémentaires

“Depuis bientôt quinze ans, cela fait partie du bon ton dans le "grand monde", de regarder de haut celui qui s’aviserait de prononcer le mot "topos", à moins que ce ne soit pour plaisanter ou qu’il n’ait l’excuse d’être logicien. (Ce sont là gens connus pour être pas comme les autres et auxquels il faut pardonner certaines lubies...)”

D’autre part, les logiciens catégoriciens aussi, après avoir défini la logique géométrique dans les années ’70, ont essentiellement délaissé l’étude des topos de Grothendieck comme topos classifiants, pour s’occuper d’autres thèmes comme celui des “topos élémentaires” de W. Lawvere et M. Tierney, un type de catégories qui se distingue des topos de Grothendieck notamment par le fait d’être finiment axiomatisable dans le langage des catégories mais de ne pas avoir toutes les colimites ni d’être toujours réprésentable par des sites.

Les topos comme ‘ponts’ unifiants

Depuis ma thèse de doctorat je me suis attachée à élaborer une théorie et des techniques qui permettent de commencer à donner corps à la vision de Grothendieck des topos comme espaces unifiants en se fondant sur la notion de topos classifiant.

Cette théorie, introduite dans le texte programmatique “*The unification of Mathematics via Topos Theory*” de 2010, permet d’exploiter la flexibilité technique inhérente à la notion de topos - plus précisément la possibilité de représenter les topos d’une multitude de façons différentes - pour construire des ‘ponts’ unifiants entre différentes théories mathématiques ayant des contenus sémantiques équivalents ou étroitement reliés.

Dans les dernières années, en plus de conduire à la résolution de problèmes ouverts depuis longtemps en logique catégorique, ces techniques générales ont engendré plusieurs applications non-triviales dans différents secteurs des mathématiques, et le potentiel de cette théorie a juste commencé d’être exploité.

En fait, ces ‘ponts’ se révèlent utiles non seulement pour relier entre elles des théories mathématiques différentes mais aussi pour étudier une théorie mathématique donnée à l’intérieur d’un domaine spécifique.

Quelques applications

- Théorie des modèles (interprétation et généralisation topos-théorique du théorème de Fraïssé)
- Théorie de la demonstration (nouveaux systèmes déductifs pour les théories géométriques)
- Algèbre (généralisation topos-théorique du formalisme Galoisien)
- Topologie (interprétation/génération de dualités de types de Stone et de Priestley)
- Analyse fonctionnelle (résultats sur les spectres de Gelfand et les compactifications de Wallman)
- Groupes reticulés et MV-algèbres (travaux avec mon étudiante de doctorat A. C. Russo)
- Structures cycliques introduites par A. Connes et C. Consani (travail sur les "théories cycliques" avec mon étudiant de master N. Wentzlaff)
- Géométrie algébrique (généralisation des motifs de Nori avec L. Barbieri-Viale et L. Lafforgue, et approche logique aux problèmes d'indépendance de ℓ)

Les topos comme *ponts*

- La notion d’équivalence de Morita est omniprésente en mathématiques ; en effet, elle formalise dans beaucoup de situations la sensation de ‘regarder la même chose de différentes manières’ ou de ‘construire un même objet mathématique par des méthodes différentes’.
- En fait, plusieurs dualités et équivalences importantes en mathématiques peuvent s’interpréter naturellement en termes de Morita-equivalences.
- D’autre part, la théorie des topos en elle-même est une source primordiale d’équivalences de Morita. En effet, les différentes représentations d’un même topos peuvent être interprétées comme des équivalences de Morita entre différentes théories.
- Deux théories bi-interprétables sont Morita-équivalentes mais, très remarquablement, la réciproque n’est pas vraie (voir mes travaux sur les MV-algèbres).
- De plus, la notion d’équivalence de Morita saisit le dynamisme intrinsèque inhérent à la notion de théorie mathématique ; en effet, une théorie mathématique donne lieu par elle-même à une infinité d’équivalences de Morita.

Les topos comme *ponts*

- L’existence de différentes théories ayant le même topos classifiant se traduit, au niveau technique, par l’existence de différentes représentations (en particulier, de différents sites de définition) d’un même topos.

- Des invariants des topos peuvent donc être utilisés pour transférer des informations d’une théorie à une autre :

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{E}_{\mathbb{T}} \simeq \mathscr{E}_{\mathbb{T}'} \arrow[dr, dashed] & \\ \mathbb{T} \arrow[ur, dashed] & & \mathbb{T}' \end{tikzcd}$$

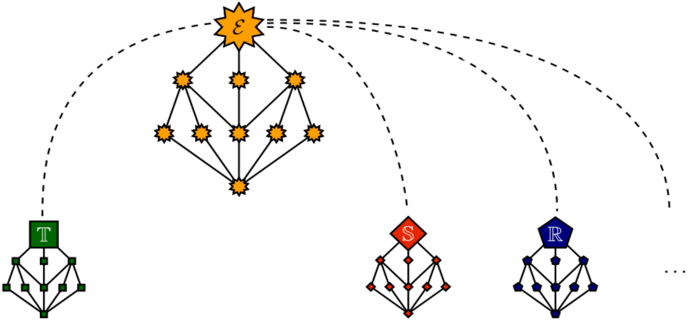
- Le transfert d’information se réalise en exprimant un invariant donné en termes des différentes représentations du topos.

Les topos comme *ponts*

- Ainsi, des propriétés (resp. constructions) différentes considérées dans le contexte de théories classifiées par un même topos apparaissent comme des *manifestations* différentes d’une *unique* propriété (resp. construction) qui vit au niveau des topos.
- Chaque invariant des topos se comporte dans ce contexte comme une ‘paire de lunettes’ qui permet de discerner de l’information ‘cachée’ dans l’équivalence de Morita considérée ; différents invariants permettent de transférer différentes informations.
- Cette méthodologie est techniquement efficace car la relation entre un topos et ses différentes représentations est souvent très naturelle, ce qui permet de transférer aisément des invariants entre differentes réprésentations (et donc entre differentes théories).
- Le niveau de généralité des invariants topos-théoriques est idéal pour saisir beaucoup d’aspects importants des théories mathématiques. En effet, des invariants importants du topos classifiant $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$ d’une théorie géométrique $\mathbb{T}$ se traduisent dans des propriétés logiques (syntactiques ou sémantiques) intéressantes de $\mathbb{T}$.

Les topos comme *ponts*

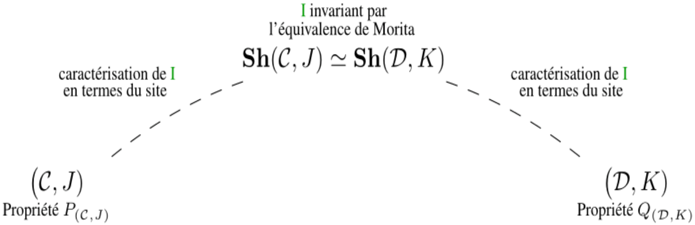
- Le fait que des invariants des topos se spécialisent en des propriétés ou constructions importantes, ayant un intérêt mathématique naturel, est une indication claire de la centralité de ces concepts en mathématiques. En fait, tout ce qui se passe au niveau des topos a des ramifications ‘uniformes’ à travers les mathématiques : par exemple



Cette figure représente la structure de treillis sur la collection des sous-topos d’un topos $\mathscr{E}$ qui induit des structures de treillis sur les collections de ‘quotients’ de théories géométriques $\mathbb{T}$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{R}$ classifiées par $\mathscr{E}$.

La technique de ‘construction des ponts’

- Tabliers des ‘ponts’ : équivalences de Morita (ou plus généralement morphismes de topos ou autres types de relations entre eux)
- Arches des ‘ponts’ : Caractérisation en termes de sites (ou plus généralement expression d’invariants des topos en termes de leurs différentes représentations)



Ce ‘pont’ donne une équivalence logique (ou un autre type de relation logique) entre les propriétés ‘concrètes’ $P_{(\mathscr{C},J)}$ et $Q_{(\mathscr{D},K)}$, interprétées dans ce contexte comme des manifestations d’une unique propriété I qui vit au niveau des topos.

Quelques exemples de 'ponts'

Discutons quelques 'ponts' établis dans le contexte des applications mentionnées ci-dessus :

- Théories de type préfaisceau
- Théorème de Fraïssé topos-théorique
- Théorie de Galois topologique

Ces résultats sont complètement *différents*... mais la méthodologie sous-jacente est toujours la *même* !

Théories de type préfaisceau

Définition

Une théorie géométrique est dite de type préfaisceau si elle est classifiée par un topos de préfaisceaux.

Les théories de type préfaisceau sont très importantes car elles constituent les ‘briques de base’ à partir desquelles toute théorie géométrique peut être construite. En effet, comme tout topos de Grothendieck s’écrit comme sous-topos de topos de préfaisceaux, toute théorie géométrique est ‘quotient’ de théories de type préfaisceau.

Toute théorie algébrique finitaire est de type préfaisceau, mais la classe des théories de ce type contient beaucoup d’autres théories mathématiques intéressantes.

Toute théorie $\mathbb{T}$ de type préfaisceau possède deux représentations différentes de son topos classifiant qui peuvent être utilisées pour construire des ‘ponts’ reliant sa syntaxe et sa sémantique :

$$\begin{tikzcd}
 & {[\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set}), \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})} \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\
\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}} & & (\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})
\end{tikzcd}$$

Ici, f.p.$\mathbb{T}$-mod($\mathbf{Set}$) est la catégorie des modèles finiment présentables de $\mathbb{T}$ et $(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$ est le site syntactique de $\mathbb{T}$.

Un théorème de définissabilité

Théorème

Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau. Supposons qu'il nous soit donné, pour tout modèle ensembliste finiment présentable $\mathscr{M}$ de $\mathbb{T}$, un sous-ensemble $R_{\mathscr{M}}$ de $\mathscr{M}^n$ de telle façon que tout homomorphisme de $\mathbb{T}$-modèles $h : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ envoie $R_{\mathscr{M}}$ dans $R_{\mathscr{N}}$. Alors il existe une formule géométrique $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ qui, pour tout $\mathbb{T}$-modèle finiment présentable $\mathscr{M}$, définisse le sous-ensemble $R_{\mathscr{M}}$.

Sous-objet de $UA_1 \times \cdots \times UA_n$

$[\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set}), \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$

$\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}$

Corréspondence fonctorielle

$M \to R_M \subseteq MA_1 \times \cdots \times MA_n$

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$

Formule géométrique

$\phi(x_1^{A_1}, \ldots, x_n^{A_n})$

Théorème de Fraïssé topos-théorique

Le résultat suivant, qui généralise le théorème de Fraïssé en théorie classique des modèles, découle d'un triple 'pont'.

Définition

Un modèle ensembliste M d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$ est dit homogène *si pour toute flèche $y : c \to M$ dans $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ et toute flèche $f : c \to d$ dans $\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ il existe une flèche $u : d \to M$ dans $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ telle que $u \circ f = y$:*

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "y"] \arrow[d, "f"'] & M \\ d \arrow[ur, dashed, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Théorème

Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau telle que la catégorie $\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ soit non-vide et satisfasse AP et JEP. Alors la théorie $\mathbb{T}'$ des $\mathbb{T}$-modèles homogènes est complète et atomique.

Théorème de Fraïssé topos-théorique

Topos atomique
$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$

$(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at})$
Site atomique i.e.
AP sur f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**)

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$
Atomicité de $\mathbb{T}'$

Topos bivalent
$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$

$(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at})$
JEP sur f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**)

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$
Complétude de $\mathbb{T}'$

Point de
$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$

$(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at})$
$\mathbb{T}$-modèle homogène dans **Set**

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$
$\mathbb{T}'$-modèle dans **Set**

Théorie de Galois topologique

Théorème

Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau telle que la catégorie f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**) *des modèles finiment présentables satisfasse AP et JEP, et soit M un modèle* f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**)*-universel et* f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**)*-ultrahomogène de $\mathbb{T}$. Alors on a une équivalence de topos*

$$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{op}, J_{at}) \simeq \mathbf{Cont}(Aut(M)),$$

où $Aut(M)$ est muni de la topologie de la convergence point par point.
Cette équivalence est induite par le foncteur

$$F : \text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{op} \to \mathbf{Cont}(Aut(M))$$

qui envoie tout modèle c de f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**) *sur l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})}(c, M)$ *(muni de l'action évidente de $Aut(M)$) et toute flèche $f : c \to d$ dans* f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**) *sur l'application $Aut(M)$-équivariante*

$$- \circ f : \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})}(d, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})}(c, M) .$$

Théorie de Galois topologique

Le résultat suivant est le fruit de deux ponts, respectivement obtenus en considérant les notions invariantes d’atome et de flèche entre des atomes.

Théorème

Sous les hypothèses du dernier théorème, le foncteur F est pleinement fidèle si et seulement si toute flèche de $\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ *est un monomorphisme strict, et c’est une équivalence sur la sous-catégorie pleine* $\mathbf{Cont}_t(Aut(M))$ *de* $\mathbf{Cont}(Aut(M))$ *sur les actions transitives si de plus* $\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ *est atomiquement complète.*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at}) \simeq \mathbf{Cont}(Aut(M)) \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\
\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}} & & \mathbf{Cont}_t(Aut(M))
\end{tikzcd}
$$

Ce théorème généralise la théorie des catégories galoisiennes de Grothendieck et peut s’appliquer pour obtenir des théories de type galoisien dans différents domaines des mathématiques, par exemple celui des groupes finis et celui des graphes finis.

Perspectives futures

Les résultats obtenus jusqu’à présent montrent que les topos peuvent jouer efficacement le rôle d’espaces unifiants pour transférer de l’information entre théories mathématiques différentes et engendrer de nouvelles équivalences, dualités et symétries à travers divers secteurs des mathématiques.

Les topos ont en effet un véritable pouvoir créateur en mathématiques au sens que leur étude dégage naturellement, et dans des contextes mathématiques les plus divers, un grand nombre de notions et résultats ‘concrets’ qui sont pertinents mais souvent insoupçonnés.

Nous comptons poursuivre la recherche à la fois sur le plan théorique et sur celui appliqué pour continuer à développer le potentiel des topos comme outils fondamentaux dans l’étude des théories mathématiques et de leurs relations, et surtout comme concept “clé” définissant une nouvelle manière de faire des mathématiques susceptible d’apporter un éclairage unique sur un grand nombre de sujets différents.

Pour approfondir

- O. Caramello
  Grothendieck toposes as unifying ‘bridges’ in Mathematics,
  Mémoire d’habilitation à diriger des recherches,
  Université de Paris 7 (2016),
  disponible sur mon site www.oliviacaramello.com.
- O. Caramello
  Theories, Sites, Toposes : Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic ‘bridges’,
  Oxford University Press (2017).