

Reale o immaginario? La lezione dei topoi

Olivia Caramello

(Università degli Studi dell'Insubria - Como)

ScienzaNuova 2019, Merano
22 luglio 2019

La “nozione unificatrice” di topos

In questo seminario il termine 'topos' significherà sempre 'topos di Grothendieck'.

*“C'est le thème du **topos** qui est ce “lit”, ou cette “rivière profonde” où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures “discontinues” ou “discrètes”. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une “essence” commune à des situations des plus éloignées les unes des autres provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques”.*

A. Grothendieck

A partire dalla mia tesi di dottorato, mi sono occupata di sviluppare una teoria e delle tecniche che permettano di cominciare a dare corpo alla visione di Grothendieck, fondandomi sulla nozione di **topos classificatore** introdotta dai logici.

I topoi come 'ponti' unificanti

Questa teoria, introdotta nel testo programmatico "*The unification of Mathematics via Topos Theory*" del 2010, permette di sfruttare la flessibilità tecnica inerente alla nozione di topos - più precisamente la possibilità di rappresentare un topos in una moltitudine di modi diversi - per costruire dei **'ponti'** utili a unificare e trasferire nozioni, idee e risultati tra teorie matematiche distinte.

Negli ultimi anni, oltre a condurre alla risoluzione di problemi aperti da molto tempo in logica categoriale, queste tecniche hanno generato diverse **applicazioni** non-triviali in differenti campi della matematica, ma molto resta ancora da fare affinché i topoi diventino uno **strumento chiave** universalmente utilizzato per lo studio delle **teorie matematiche** e delle loro **relazioni**.

Di fatto, questi 'ponti' si sono rivelati utili non solo per **collegare** tra loro teorie matematiche differenti ma anche per **studiare** una data teoria matematica all'interno di un determinato campo.

Alcune applicazioni

Reale o
immaginario? La
lezione dei topoi

Olivia Caramello

Introduzione

Il tema
dell'unificazione

Preliminari

Topoi come
'ponti'

L'idea di ponte

Prospettive future

Per approfondire

- **Teoria dei modelli** (interpretazione e generalizzazione topos-teoretica del teorema di Fraïssé)
- **Teoria della dimostrazione** (nuovi sistemi dimostrativi per le teorie geometriche)
- **Algebra** (generalizzazione topos-teoretica del formalismo Galoisiano)
- **Topologia** (interpretazione/generazione di dualità di tipo Stone e Priestley)
- **Analisi funzionale** (risultati sugli spettri di Gelfand e le compattificazioni di Wallman)
- **Gruppi reticolati e MV-algebre** (articoli con la mia (ex) studentessa di dottorato A.C. Russo)
- **Strutture cicliche** introdotte da A. Connes et C. Consani (lavoro sulle "teorie cicliche" con il mio (ex) studente di master N. Wentzlaff)
- **Geometria algebrica** (generalizzazione dei motivi di Nori con L. Barbieri-Viale e L. Lafforgue, e approccio logico al problema dell'indipendenza da ℓ)

Piano del seminario

Reale o
immaginario? La
lezione dei topoi

Olivia Caramello

Introduzione

Il tema
dell'unificazione

Preliminari

Topoi come
'ponti'

L'idea di ponte

Prospettive future

Per approfondire

- Il tema dell'unificazione
- Preliminari sui topoi
- I topoi come 'ponti'
- La dualità reale/immaginario alla luce dei topoi
- Prospettive future

'Unificare' la matematica

Reale o
immaginario? La
lezione dei topoi

Olivia Caramello

Introduzione

Il tema
dell'unificazione

Preliminari

Topoi come
'ponti'

L'idea di ponte

Prospettive future

Per approfondire

- La **teoria degli insiemi** ha rappresentato il primo serio tentativo della logica di unificare la matematica almeno sul piano del linguaggio.
- Successivamente, la **teoria delle categorie** ha offerto un linguaggio astratto alternativo in cui la maggior parte della matematica può essere formulata.

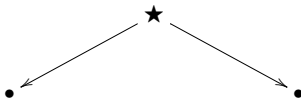
Tuttavia, entrambi questi sistemi realizzano un'unificazione che è alquanto **limitata** nel suo scopo nel senso che, per quanto essi offrano un modo per esprimere e organizzare la matematica in **un singolo linguaggio**, essi non forniscono metodi per un effettivo **trasferimento di conoscenza** tra settori distinti.

Al contrario, i **topoi** permettono di collegare efficacemente differenti teorie matematiche tra di loro, e di studiare una data teoria attraverso una molteplicità di punti di vista differenti, offrendo quindi un approccio più sostanziale al problema di 'unificare la matematica'.

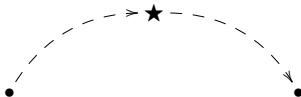
Il concetto di unificazione

Possiamo distinguere due diversi tipi di unificazione.

- Unificazione **'statica'** (attraverso una **generalizzazione**): due concetti sono visti come istanze di uno più generale:



- Unificazione **'dinamica'** (attraverso una **costruzione**): due oggetti sono collegati tra loro attraverso un terzo oggetto (normalmente costruito a partire da ciascuno di essi separatamente), che svolge la funzione di **'ponte'** permettendo un trasferimento di informazione tra di essi.



Il trasferimento di informazione risulta dal processo di **'traduzione'** di proprietà dell'oggetto 'ponte' (rispettivamente costruzioni su di esso) in termini di proprietà dei due oggetti (rispettivamente costruzioni su di essi).

La natura multiforme dei topoi

I topoi sono oggetti particolarmente **multiformi**, che possono essere efficacemente studiati utilizzando una molteplicità di punti di vista differenti.

Di fatto, un **topos** può essere visto come:

- uno **spazio generalizzato**
- un **universo matematico**
- una **teoria modulo 'Morita-equivalenza'**

Richiamiamo ora brevemente ciascuno di questi differenti punti di vista.

Topoi come universi matematici

Un decennio dopo, W. Lawvere and M. Tierney hanno scoperto che un topos può essere visto non solo come uno spazio generalizzato ma anche come un **universo matematico** in cui si può fare matematica in modo del tutto analogo a quanto si fa nel contesto classico degli insiemi (con la sola importante eccezione che occorre ragionare costruttivamente).

Tra le altre cose, questa scoperta ha permesso di:

- Sfruttare la 'flessibilità' inerente alla nozione di topos per costruire '**nuovi mondi matematici**' con particolari proprietà.
- Considerare **modelli** di qualsivoglia teoria matematica non solo nel contesto insiemistico classico, ma all'interno di ogni topos, e quindi di '**relativizzare**' la matematica.

Topoi come teorie (modulo Morita-equivalenza)

Negli anni '70, grazie al lavoro di diversi logici/categoristi, tra cui in particolare M. Makkai e G. Reyes, è stato scoperto che:

- Ad ogni teoria matematica \mathbb{T} (di una certa forma molto generale) si può associare canonicamente un topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, detto il **topos classificatore** della teoria, che rappresenta il suo 'cuore semantico'.
- Due teorie matematiche hanno lo stesso topos classificatore (a meno di equivalenza) se e solo se hanno lo stesso 'cuore semantico', ovvero se e solo se esse sono indistinguibili da un punto di vista semantico; tali teorie sono dette **Morita-equivalenti**.
- Reciprocamente, ogni topos è il topos classificatore di una qualche teoria.
- Un topos può quindi essere visto come un **rappresentante canonico** di classi di equivalenza di teorie modulo Morita-equivalenza.

Topoi come teorie (modulo Morita-equivalenza)

Negli anni '70, grazie al lavoro di diversi logici/categoristi, tra cui in particolare M. Makkai e G. Reyes, è stato scoperto che:

- Ad ogni teoria matematica \mathbb{T} (di una certa forma molto generale) si può associare canonicamente un topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, detto il **topos classificatore** della teoria, che rappresenta il suo 'cuore semantico'.
- Due teorie matematiche hanno lo stesso topos classificatore (a meno di equivalenza) se e solo se hanno lo stesso 'cuore semantico', ovvero se e solo se esse sono indistinguibili da un punto di vista semantico; tali teorie sono dette **Morita-equivalenti**.
- Reciprocamente, ogni topos è il topos classificatore di una qualche teoria.
- Un topos può quindi essere visto come un **rappresentante canonico** di classi di equivalenza di teorie modulo Morita-equivalenza.

Topoi come 'ponti'

Reale o
immaginario? La
lezione dei topoi

Olivia Caramello

Introduzione

Il tema
dell'unificazione

Preliminari

Topoi come
'ponti'

L'idea di ponte

Prospettive future

Per approfondire

- La nozione di Morita-equivalenza formalizza in molte situazioni la sensazione di 'guardare la stessa cosa da diversi punti di vista' o 'costruire uno stesso oggetto in modi diversi', il che spiega la sua **ubiquità** in matematica.
- In effetti, molte importanti **dualità** ed **equivalenze** in matematica possono essere naturalmente interpretate come risultanti da **Morita-equivalenze**.
- Due teorie **bi-interpretabili** (ovvero tra le quali esiste un '**dizionario**') sono Morita-equivalenti ma, significativamente, il converso non è vero.
- Inoltre, la nozione di Morita-equivalenza cattura il dinamismo intrinseco al concetto stesso di teoria matematica: in effetti, una teoria **da sola** genera un **numero infinito** di Morita-equivalenze.
- La **teoria dei topoi** stessa è una fonte primaria di Morita-equivalenze. In effetti, rappresentazioni differenti dello stesso topos possono essere interpretate come Morita-equivalenze tra differenti teorie matematiche.

Topoi come 'ponti'

Reale o
immaginario? La
lezione dei topoi

Olivia Caramello

Introduzione

Il tema
dell'unificazione

Preliminari

Topoi come
'ponti'

L'idea di ponte

Prospettive future

Per approfondire

- L'esistenza di **differenti teorie** con lo stesso topos classificatore si traduce, a livello tecnico, nell'esistenza di **differenti rappresentazioni** dello stesso topos.
- Gli **invarianti** topos-teoretici possono quindi essere usati per trasferire informazioni da una teoria all'altra:

$$\mathbb{T} \dashrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \dashrightarrow \mathbb{T}'$$

- Il **trasferimento di informazioni** avviene esprimendo un dato invariante in termini delle differenti rappresentazioni del topos.

Topoi come 'ponti'

Reale o
immaginario? La
lezione dei topoi

Olivia Caramello

Introduzione

Il tema
dell'unificazione

Preliminari

Topoi come
'ponti'

L'idea di ponte

Prospettive future

Per approfondire

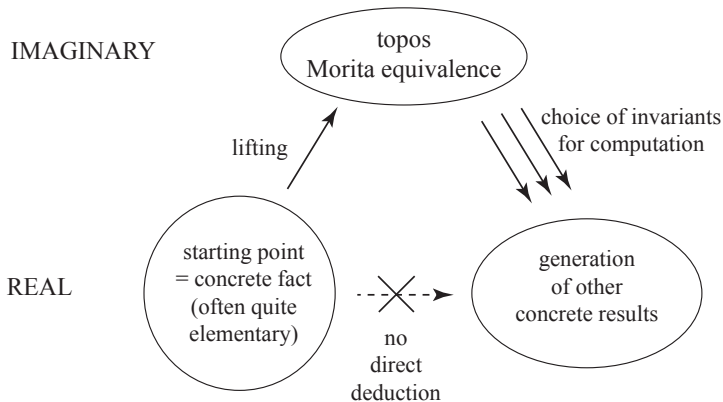
- Differenti proprietà (rispettivamente costruzioni) nel contesto di teorie classificate dallo stesso topos vengono a essere interpretate come differenti *manifestazioni* di un'*unica* proprietà (rispettivamente costruzione) che vive al livello dei topoi.
- Ogni invariante topos-teoretico si comporta in questo contesto come una sorta di 'paio di occhiali' che permette di discernere dell'informazione nascosta dell'equivalenza di Morita considerata; differenti invarianti permettono di mettere in luce e *trasferire* differenti informazioni.
- Questa metodologia è tecnicamente efficace in quanto la *relazione tra un topos e le sue rappresentazioni* è *molto naturale*, il che permette di trasferire invarianti attraverso differenti rappresentazioni (e quindi, attraverso differenti teorie) in maniera tecnicamente fattiva benché in generale non-triviale.

Una morfogenesi matematica

- L'**ambiguità** essenziale data dal fatto che un topos è associato in generale ad un'infinità di teorie o siti differenti permette di studiare le relazioni tra diverse teorie, e quindi le teorie stesse, utilizzando i topoi come 'ponti' tra queste differenti presentazioni.
- Ogni invariante topos-teoretico genera un'autentica **morfogenesi matematica**, risultante dalla sua espressione in termini delle differenti rappresentazioni dei topoi, che dà luogo in generale a proprietà concretamente completamente diverse e apparentemente scollegate.
- L'esplorazione matematica è quindi in un certo senso '**rovesciata**' in quanto guidata dalle **Morita-equivalenze** e dagli **invarianti topos-teoretici**, a partire dai quali uno procede per estrarre informazioni concrete rilevanti per le teorie che intende studiare.

Ponti immaginari

Possiamo schematicamente rappresentare il modo di ottenere risultati concreti applicando la tecnica dei 'ponti' nella forma di un'ascesa seguita da una discesa tra due livelli, quello 'reale' della matematica concreta e quello 'immaginario' dei topoi:



La dualità tra 'reale' e 'immaginario'

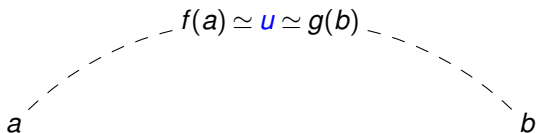
- Il passaggio da un sito (o una teoria) al topos associato può essere visto come una forma di **'completamento'** attraverso l'aggiunta di 'immaginari' (nel senso della teoria dei modelli), che **materializza** il potenziale contenuto nel sito (o teoria).
- La dualità tra il mondo (relativamente) non strutturato delle presentazioni delle teorie e il mondo massimamente strutturato dei topoi è di grande rilevanza in quanto, da un lato, la 'semplicità' e concretezza delle teorie o siti rende facile il manipolarli mentre, d'altro canto, i calcoli sono molto più semplici nel mondo 'immaginario' dei topoi in virtù della loro struttura interna estremamente ricca e del fatto che gli **invarianti** vivono a questo livello.

Come studiare le relazioni tra oggetti diversi?

- Per trasferire informazione tra due entità legate da una certa relazione, è fondamentale identificare (e, se possibile, classificare) le proprietà di tali entità che sono **invarianti** rispetto a questa relazione.
- A seconda dei casi, questo può essere un problema trattabile oppure di grande complessità.
- In effetti, accade spesso che due oggetti o situazioni differenti non possano essere collegati tra loro in modo **diretto** e che sia necessario adottare un nuovo punto di vista per metterli in relazione.
- D'altra parte, una **relazione** tra due oggetti è in generale un'entità **astratta**, che vive in un contesto ideale che normalmente è *diverso* da quello in cui vivono i due oggetti.
- È quindi di importanza cruciale il fatto di identificare degli oggetti più concreti che possano **incarnare gli invarianti** (o sui quali gli invarianti siano naturalmente definiti) tra i nostri due oggetti e servire da 'ponti' per trasferire dell'informazione tra loro.

Oggetti *ponte*

- Possiamo pensare ad un **oggetto *ponte*** che collega due oggetti a e b come ad un oggetto u che può essere 'costruito' a partire da ciascuno dei due oggetti a e b indipendentemente e che quindi ammette due 'rappresentazioni' $f(a)$ e $g(b)$ legate da una certa relazione di equivalenza \simeq :



- Il trasferimento di informazione risulta dal processo di '**traduzione**' di proprietà di (risp. costruzioni su) l'oggetto *ponte* in proprietà di (risp. costruzioni su) i due oggetti utilizzando le due rappresentazioni differenti dell'oggetto *ponte*.

Contingente e universale

Reale o
immaginario? La
lezione dei topoi

Olivia Caramello

Introduzione

Il tema
dell'unificazione

Preliminari

Topoi come
'ponti'

L'idea di ponte

Prospettive future

Per approfondire

- Ogni linguaggio o punto di vista è **parziale** (o 'bucato') ed è soltanto attraverso l'integrazione di tutti i punti di vista che si arriva a cogliere l'essenza delle cose.
- Non c'è un linguaggio universale che sarebbe migliore (nell'assoluto) di tutti gli altri; ogni punto di vista mette in luce certi aspetti nascondendone altri e può rivelarsi più conveniente di un altro in relazione ad un certo obiettivo.
- L'**universalità** deve quindi essere ricercata non al livello dei linguaggi ma a quello degli oggetti 'ideali' sui quali sono definiti gli **invarianti**.
- Occorre quindi ragionare a **due livelli**, quello degli invarianti (e degli oggetti su cui essi sono definiti) e quello delle loro manifestazioni nel contesto delle situazioni 'concrete', e studiare la **dualità** tra questi due livelli, una dualità che può essere pensata come quella tra un 'senso' e i differenti modi di esprimerlo.

Completamenti ed invarianti

Reale o
immaginario? La
lezione dei topoi

Olivia Caramello

Introduzione

Il tema
dell'unificazione

Preliminari

Topoi come
'ponti'

L'idea di ponte

Prospettive future

Per approfondire

- Per mettere in relazione tra loro linguaggi o punti di vista differenti bisogna in generale '**completarli**' a degli oggetti che realizzino esplicitamente l'implicito nascosto in ciascuno di loro.
- È al livello di questi oggetti completati che si manifestano gli invarianti, ovvero le **simmetrie**, e che possiamo comprendere le relazioni tra i nostri oggetti di partenze grazie ai **ponti** generati dagli invarianti.
- Il topos classificatore di una teoria, ad esempio, è costruito attraverso un processo di completamento della teoria stessa, rispetto, in un certo senso, a tutti i concetti che essa è potenzialmente in grado di esprimere.
- Grazie alla tecnica dei 'ponti', teorie differenti che descrivono uno stesso contenuto matematico vengono messe in relazione fra loro come se fossero **frammenti** di un **unico oggetto**, linguaggi parziali che si completano rispecchiandosi gli uni negli altri all'interno della totalità dei punti di vista incarnata dal topos classificatore.

Da uno schizzo alla realtà

Reale o
immaginario? La
lezione dei topoi

Olivia Caramello

Introduzione

Il tema
dell'unificazione

Preliminari

Topoi come
'ponti'

L'idea di ponte

Prospettive future

Per approfondire

- Una traduzione non va pensata come un fenomeno di messa in relazione tra entità necessariamente molto diverse tra loro ma come ad un processo di scoperta di nuove potenzialità **implicite** in un certo punto di vista o linguaggio.
- Ogni linguaggio, nel tentativo di esprimere una realtà che è molto più ricca, è assimilabile ad uno schizzo; il passaggio da un'espressione linguistica al suo significato si configura quindi come una sorta di completamento, simile a quello automatico effettuato dal nostro cervello mentre osserviamo l'artista che lo disegna:

Traduzioni strutturali

Reale o
immaginario? La
lezione dei topoi

Olivia Caramello

Introduzione

Il tema
dell'unificazione

Preliminari

Topoi come
'ponti'

L'idea di ponte

Prospettive future

Per approfondire

Il metodo dei ponti può essere interpretato linguisticamente come una metodologia per **tradurre** concetti da un contesto all'altro. Ma di che tipo di traduzione si tratta?

In generale, possiamo distinguere due differenti approcci al problema della traduzione.

- L'approccio '*bottom-up*' o '**orientato al dizionario**', che consiste nel rinominare, sulla base di un dizionario, i costituenti elementari (e.g., le parole) del testo in questione.
- L'approccio '*top-down*' o '**orientato agli invarianti**', che consiste nell'identificazione di concetti appropriati che dovrebbero rimanere invariati attraverso la traduzione, e nella successiva analisi di come questi invarianti si esprimano nelle due lingue.

Le traduzioni **basate sui 'ponti'**, e in particolare quelle topos-teoretiche, sono del secondo tipo.

È l'espressione degli invarianti topos-teoretici in termini delle differenti teorie classificate da un dato topos a determinare le 'traduzioni' tra teorie differenti, e ciò è essenzialmente determinato dalla **relazione strutturale** tra il topos e le sue differenti rappresentazioni.

Ideale = reale?

- I ponti abbondano in matematica e altri campi della scienza, e possono essere considerati **'responsabili'** (almeno astrattamente) della **genesi** delle cose e della natura della realtà così come la percepiamo.
- L'idea di ponte è un'astrazione ma, sorprendentemente, molti ponti che sorgono nell'ambito delle scienze sperimentali possono essere identificati con veri e propri oggetti **'fisici'**.
- In effetti, le situazioni più illuminanti sono quelle in cui questi oggetti **ideali** ammettono rappresentazioni **'concrete'**, che ci permettono di contemplare la dinamica della **'differenziazione dall'unità'** in tutti i suoi aspetti.
- La teoria dei topoi permette di **materializzare** un grande numero di oggetti ideali, e quindi di servire da ponti tra una grande varietà di contesti differenti.
- In generale, cercare **rappresentazioni 'concrete'** di **concetti immaginari** può condurre alla scoperta di ambienti matematici maggiormente ricchi di **'simmetrie'** in cui i fenomeni possono essere descritti in modi naturali e unificanti.

Il programma dei topoi come 'ponti' unificanti

I risultati ottenuti finora mostrano che i topoi possono effettivamente giocare il ruolo di 'ponti' per trasferire informazioni tra differenti teorie matematiche.

Contiamo quindi di proseguire la ricerca in questa direzione per sviluppare ulteriormente il potenziale unificante della nozione di topos.

Temi centrali in questo programma saranno:

- studio di **dualità** o **corrispondenze** importanti in matematica da un punto di vista topos-teoretico (in particolare, la teoria dei motivi e il programma di Langlands)
- studio sistematico degli **invarianti** dei topoi in termini delle loro rappresentazioni, e introduzione di nuovi invarianti che catturino aspetti essenziali di problemi matematici concreti
- introduzione di nuove metodologie per generare delle **Morita-equivalenze**
- interpretazione e generalizzazione di parti importanti della **teoria dei modelli** (sia classica che moderna) in termini di topoi e sviluppo di una teoria functoriale dei modelli
- **Automazione** della tecnica di costruzione dei ponti in modo da ottenere un *proof assistant* capace di generare meccanicamente nuovi risultati all'interno di teorie matematiche formalizzate

Possibili applicazioni in altri settori

Lo sviluppo di queste tecniche unificatrici, e delle idee generali che ad esse sottendono, è suscettibile di gettare luce anche in ambito extra-matematico, ad esempio in

- **Fisica** (e.g., analisi e interpretazione di dualità, topoi per la teoria della relatività e la meccanica quantistica)
- **Informatica** (e.g., semantica dei linguaggi di programmazione e dimostrazione automatica di teoremi)
- **Linguistica** (e.g., sintassi e semantica dei linguaggi naturali, studi comparativi e teoria della traduzione)
- **Filosofia** (e.g., metodologia della scienza, ontologia dei concetti matematici)
- **Teoria Musicale** (e.g., analisi della composizione, dell'interpretazione e dell'esecuzione)

Per approfondire



O. Caramello

Grothendieck toposes as unifying 'bridges' in Mathematics,
Mémoire d'habilitation à diriger des recherches,
Université de Paris 7, 2016,
disponibile sul mio sito www.oliviacaramello.com.



O. Caramello.

*Theories, Sites, Toposes: Relating and studying
mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'*,
Oxford University Press, 2017.