Invariants ou dictionnaires? Un point de vue topos-théorique

Olivia Caramello

Università degli Studi dell'Insubria (Como) et IHES

21 mars 2018

'Ponts' et 'traductions' en mathématiques

- Les mathématiques consistent en plusieurs branches (e.g., l'algèbre, la géométrie, l'analyse, la topologie, la théorie des nombres) - chacune caracterisée par son propre langage et techniques.
- Avec le temps, plusieurs connexions entre ces secteurs ont été découvertes, conduisant dans certains cas à la création de veritables 'ponts' entre ces différentes branches (pensez par exemple à la géométrie analytique).
- L'importance des 'ponts' entre différents secteurs réside dans le fait qu'ils rendent possible un transfer de connaissances et de méthodes entre eux, ce qui permet de formuler, et éventuellement résoudre, des problèmes posés dans le langage d'un secteur en utilisant des techniques d'autres secteurs.
- La logique mathématique et la théorie des topos s'avèrent être des instruments fondamentaux pour étudier de façon systématique et rigoureuse les relations entre théories mathématiques différentes.

La "notion unificatrice" de topos

La notion de topos de Grothendieck joue un role unifiant en mathématiques.

"C'est le thème du topos qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde" où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques".

A. Grothendieck

Depuis ma thèse de doctorat je me suis attachée à élaborer une théorie et des techniques qui permettent de commencer à donner corps à la vision de Grothendieck en se fondant sur la notion de topos classifiant dégagée par les logiciens.

Les topos classifiants

- Il a été réalisé dans les années '70 que à toute théorie $\mathbb{T}$ d'une forme très générale on peut associer canoniquement un topos $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$, appelé son topos classifiant, qui représente son 'cœur sémantique'.
- Deux théories ont le même topos classifiant (à équivalence près) si et seulement si elles ont le même 'cœur semantique', c'est-à-dire si et seulement si elles sont indistinguables du point de vue sémantique ; deux telles théories sont dites Morita-équivalentes.
- Deux théories bi-interprétables (c'est-à-dire entre lesquelles existe un 'dictionnaire') sont Morita-équivalentes mais, très remarquablement, la réciproque n'est pas vraie.
- La notion d'équivalence de Morita formalise dans beaucoup de situations la sensation de 'regarder la même chose de différentes manières' ou de 'construire un même objet mathématique par des méthodes différentes'.
- De plus, la notion d'équivalence de Morita saisit le dynamisme intrinsèque inhérent à la notion de théorie mathématique ; en effet, une théorie mathématique donne lieu par elle-même à une infinité d'équivalences de Morita.

Les topos comme *ponts*

- L’existence de différentes théories ayant le même topos classifiant se traduit, au niveau technique, par l’existence de différentes représentations d’un même topos.

- Des invariants des topos peuvent donc être utilisés pour transférer des informations d’une théorie à une autre :

$$\mathbb{T} \dashrightarrow \mathscr{E}_{\mathbb{T}} \simeq \mathscr{E}_{\mathbb{T}'} \dashrightarrow \mathbb{T}'$$

- Le transfert d’information se réalise en exprimant un invariant donné en termes des différentes représentations du topos.

Les topos comme *ponts*

- Ainsi, des propriétés (resp. constructions) différentes considérées dans le contexte de théories classifiées par un même topos apparaissent comme des *manifestations* différentes d'une *unique* propriété (resp. construction) qui vit au niveau des topos.
- Chaque invariant des topos se comporte dans ce contexte comme une 'paire de lunettes' qui permet de discerner de l'information 'cachée' dans l'équivalence de Morita considérée ; différents invariants permettent de transférer différentes informations.
- Cette méthodologie est techniquement efficace car la relation entre un topos et ses différentes représentations est souvent très naturelle, ce qui permet de transférer aisément des invariants entre différentes représentations (et donc entre différentes théories).
- Le niveau de généralité des invariants topos-théoriques est idéal pour saisir beaucoup d'aspects importants des théories mathématiques. En effet, des invariants importants du topos classifiant $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$ d'une théorie $\mathbb{T}$ se traduisent dans des propriétés logiques intéressantes de $\mathbb{T}$.

Une morphogénèse mathématique

- Chaque invariant des topos engendre une véritable morphogénèse mathématique, résultante de son expression en termes de différentes représentations de topos, ce qui donne lieu en général à des propriétés concrètement complètement différentes et apparemment déconnectées les unes des autres.

- L'exploration mathématique est donc en un certain sens 'renversée' car elle est guidée par les équivalences de Morita et par les invariants des topos, à partir des quels on procède pour extraire des informations concrètes sur les théories qu'on souhaite étudier.

Traductions structurelles

La méthode des ponts peut être interpretée linguistiquement comme une méthode pour traduire des concepts d'un contexte à un autre. Mais de quel type de traduction s'agit-t-il ?

En général, nous pouvons distinguer deux approches différentes au problème de la traduction.

- L'approche '*bottom-up*' ou 'orienté au dictionnaire', qui consiste à chercher un dictionnaire qui permette de 'renommer' les constituants élémentaires (e.g., les mots) du texte en question.
- L'approche '*top-down*' ou 'orienté aux invariants', qui consiste à identifier des concepts appropriés qui devraient rester fixe par rapport à la traduction, et à analyser ensuite comment ces invarients s'expriment dans les deux langues.

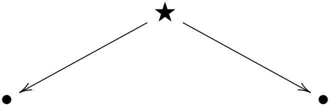
Les traductions fondées sur les 'ponts', et en particulier celles topos-théoriques, sont du deuxième type.

C'est l'expression des invariants topos-théoriques en termes des differentes théories classifiées par un topos donné à déterminer les 'traductions' entre théories différentes, et cela est essentiellement déterminé par la relation structurelle entre un topos et ses différentes représentations.

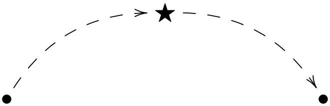
Le concept d'unification

On peut distinguer entre deux types différents d'unification :

- Unification 'statique' (à travers une généralisation) : deux concepts sont vues comme des cas particuliers d'un concept plus général :



- Unification 'dynamique' (à travers une construction) : deux objets sont mis en relation par le biais d'un troisième objet (normalement construit à partir de chacun d'eux indépendamment), qui agit comme un 'pont' permettant un transfer d'information entre eux.



Le transfert d'information résulte du processus de 'traduction' de propriétés de (résp. constructions sur) l' 'objet pont' dans des propriétés des (résp. constructions sur les) deux objets.

Comparer différents objets

- Pour transférer de l'information entre deux entités liées par une certaine relation, il est fondamental d'identifier (et, si possible, de classifier) les propriétés des celles-ci qui sont invariantes par rapport à cette relation.
- Selon les cas, cela peut se révéler une tache traitable ou bien extrêmement ardue.
- En effet, il arrive souvent que deux objets ou situations différents ne puissent pas être liés entre eux de façon directe et qu'il soit nécessaire d'adopter un nouveau point de vue pour les mettre en relation.
- En effet, une relation entre deux objets est en générale une entité abstraite, qui vit dans un contexte idéal qui est généralement *différent* de celui dans lequel les deux objets vivent.
- Il est donc d'importance crucial le fait d'identifier des objets plus concrets qui puissent incarner les invariants (ou sur lesquels les invariants soient naturellement définis) entre les deux objets et servir comme des 'ponts' pour transférer de l'information entre eux.

Objets *pont*

- Nous pouvons penser à un objet *pont* reliant deux objets a et b comme un objet u qui peut être 'construit' à partir de chacun des deux objets a et b indépendamment et qui donc admet deux représentations $f(a)$ et $g(b)$ reliées par une certaine notion d'équivalence $\simeq$:

$$f(a) \simeq u \simeq g(b)$$

a $\qquad\qquad\qquad\qquad$ b

- Le transfert d'information résulte du processeur de 'traduction' de propriétés de (résp. constructions sur) l''objet pont' dans des propriétés de (résp. constructions sur) les deux objets en utilisant les deux représentations différentes de l'objet pont.

Contingent et universel

- Chaque langage ou point de vue est partiel (ou 'troué') et c'est seulement à travers l'intégration des tous les points de vue que l'on arrive à saisir l'essence des choses.
- Il n'y a pas de langage universel qui serait meilleur (dans l'absolu) que tous les autres ; chaque point de vue met en lumière certains aspects en en cachant d'autres et peut se révéler plus convenable qu'un autre par rapport à un certain but.
- L'universalité doit donc être cherchée non pas au niveau des langages mais au niveau des objets 'idéaux' sur lesquels sont définis les invariants.
- Il faut donc raisonner à deux niveaux, celui des invariants (et des objets sur lesquels ils sont définis) et celui de leurs manifestations dans le contexte des situations 'concrètes', et étudier la dualité entre ce deux niveaux, une dualité qui peut être pensée comme celle entre un 'sens' et les différentes manières de l'exprimer.

Complétion et invariants

- Pour mettre en relation des langages ou points de vue différents il faut en général les compléter à des objets qui réalisent explicitement l'implicite caché dans chacun d'eux.
- C'est au niveau de ces objets complétés qui se manifestent les symétries et que l'on peut comprendre les relations entre les objets de départ grâce aux ponts engendrés par les invariants.
- Il ne faut pas penser à la traduction comme un phénomène de mise en relation entre des entités nécessairement très différentes mais comme un processus de découverte de nouvelles potentialités implicites dans un certain point de vue ou langage considéré individuellement (comme dans une 'intraduction').

Idéal = réel ?

- Les ponts abondent en mathématiques et dans d'autres disciplines scientifiques, et ils peuvent être considerés comme 'responsables' (au moins abstraitement) de la génèse des choses et de la nature de la réalité telle que nous la percevons.
- L'idée de pont est une abstraction mais, remarquablement, plusieurs ponts dans le contexte des sciences experimentales peuvent être identifiés avec des véritables objets 'physiques'.
- En effet, les situations les plus éclairantes sont celles dans lesquelles ces objets ideaux admettent des représentations 'concrètes', qui nous permettent de mieux contempler la dynamique de la 'différentiation à partir de l'unité'.
- La théorie des topos permet de materialiser un grand nombre d'objets idéaux, qui peuvent donc servir comme ponts entre une grande variété de contextes différents.
- En général, chercher des représentations 'concrètes' de concepts imaginaires peut conduire à la découverte d'environnement mathématiques plus riche de 'symetries' dans lesquels les phénomènes peuvent être décrits d'une façon naturelle et unifiée.

Pour approfondir

- O. Caramello
  The theory of topos-theoretic 'bridges' : a conceptual introduction,
  Glass Bead journal, disponible en ligne.
- O. Caramello
  Grothendieck toposes as unifying 'bridges' in Mathematics,
  Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université de Paris 7 (2016),
  disponible sur mon site www.oliviacaramello.com.
- O. Caramello
  Theories, Sites, Toposes : Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges',
  Oxford University Press (2017).