

Vendredi le 30 janvier 2015

Sur certains travaux d'Olivia Caramello.

Cette lettre a pour but de reconnaître l'originalité du théorème de dualité d'Olivia Caramello tel que publié dans son article *Lattices of theories*.

Le théorème de dualité de Caramello est un énoncé de la théorie des topos classifiants. Il affirme que les quotients d'une théorie géométrique sont en bijection avec les sous-topos du topos classifiant de cette théorie. Bien qu'il soit considéré "folklorique" par certains experts, l'énoncé ne se trouve pas dans la littérature. J'avais cru qu'on pouvait le déduire directement de la théorie des topos classifiants de Makkai-Reyes. Ce n'est que récemment, lors d'une discussion avec Caramello, Johnstone et Lafforgue, que ce dernier attira mon attention sur un point qui m'avait jusqu'alors échappé dans la preuve de Caramello: à savoir que la catégorie sous-jacente au site syntaxique d'une théorie géométrique se modifie si on change les axiomes de cette théorie. Surpris par cette observation, j'ai voulu exhiber la démonstration "folklorique" que je pensais connaître de ce théorème. A mon grand étonnement, il m'a fallu une nuit de travail pour bâtir une démonstration basée sur mes connaissances, et cette démonstration ne dépendait que partiellement de la théorie de Makkai-Reyes! Il est vrai que Johnstone a par la suite esquissé une démonstration plus simple basée sur un article de Tierney. Toutefois, je tire de cette expérience les conclusions suivantes: (1) que j'avais mal lu l'article de Caramello; (2) que le théorème de dualité peut faussement paraître évident; (3) que le résultat est non-trivial; (4) que le résultat est original, puisqu'il ne se trouve pas dans la littérature.

Dans son article, *The unification of Mathematics via Topos Theory*, Caramello propose d'interpréter divers invariants d'un topos classifiant en termes des théories géométriques qu'il classifie. Lorsque deux théories géométriques ont le même topos classifiant (équivalence de Morita entre théories), une forme de *pont* est créé entre ces théories. Par exemple, les quotients de l'une sont en bijection avec les quotients de l'autre en vertu du théorème de dualité.

Olivia Caramello fait montre d'un talent remarquable pour découvrir et mettre en lumière certains aspects généraux des mathématiques. Sa méthodologie "topos comme pont" est une vaste extension du programme d'Erlangen de Felix Klein.

André Joyal  
Professeur émérite  
UQAM  
joyal.andre@uqam.ca