Unità e molteplicità: l'estetica dell'oggetto in matematica

Olivia Caramello

Università degli Studi dell'Insubria (Como) e IHÉS

ScienzaNuova 2020

La nozione di 'punto di vista'

- In questa lezione affronteremo il tema dell'unità e della molteplicità in matematica.

- Discuteremo in particolare la nozione di punto di vista e la sua rilevanza in relazione alla nostra percezione degli oggetti matematici.

- Vedremo che i punti di vista sono strettamente collegati alle presentazioni che possiamo avere per uno stesso oggetto, e quindi alla dualità tra il livello 'ontologico' degli oggetti e quello 'fenomenologico' delle loro manifestazioni.

Relazioni di coerenza e ricerca della verità

Pur nella loro diversità, tutte le differenti manifestazioni di una stessa entità sono coerenti tra loro.

L'opportunità di disporre di differenti punti di vista su un determinato tema è cruciale nel testare la validità di certe ipotesi su di esso; mentre da qualcosa di falso seguono innumerevoli contraddizioni e inconsistenze (*ex falso quodlibet*), tutte le manifestazioni di qualcosa di vero sono infatti coerenti tra loro. Con l'aumentare dei punti di vista aumenta quindi anche la possibilità di rilevare possibili contraddizioni o incoerenze.

D'altra parte, ogni vera forma di comprensione passa attraverso il mettere in relazione concetti o eventi differenti. In qualsiasi ambito, i fenomeni, per essere adeguatamente compresi, devono essere contestualizzati e studiati alla luce di conoscenze già maturate in ambiti ad essi in qualche modo collegati.

Naturalmente, il fatto di effettuare un confronto con mezzi formali ci avvicinerà sempre di più a questo obiettivo in quanto un'analisi rigorosa fa emergere più facilmente problemi che resterebbero altrimenti nascosti o difficilmente percepibili.

Il potere della formalizzazione

La matematica può essere considerata in senso lato come la disciplina che studia tutto ciò che è formalizzabile, ovvero definibile in termini astratti e completamente rigorosi.

La branca della matematica che studia nello specifico le maniere di formalizzare i concetti e i ragionamenti è la logica. Questa permette di studiare in modo rigoroso gli oggetti matematici e le loro relazioni, di definire il concetto di teoria matematica e di dare un significato preciso alla nozione di punto di vista.

Differenti maniere di pensare o costruire un certo oggetto si traducono infatti in differenti formalizzazioni, che possono essere studiate di per sé nonchè in relazione le une con le altre attraverso metodi (logico-)matematici.

Sintassi e semantica

Uno dei capisaldi della logica è la distinzione fondamentale tra sintassi e semantica.

La sintassi è l'insieme dei modi (nel senso di 'forme grammaticali') di descrivere linguisticamente un certo contenuto.

La semantica è l'insieme dei modi possibili di attribuire significati a delle espressioni sintattiche date (le quali di per sé non hanno nessun significato).

Ad esempio, le lingue naturali (italiano, inglese, cinese, giapponese, etc.) hanno ciascuna una propria sintassi che fornisce un modo per denotare oggetti 'reali' o concetti (attraverso il suo vocabolario) e specifica regole per manipolare tali espressioni costruendone di più complesse (attraverso la sua grammatica). In questo senso, la semantica si configura come il mondo delle strutture, degli oggetti 'reali' che desideriamo comprendere e descrivere.

La pluralità dei punti di vista

L'esperienza di descrivere uno stesso contenuto in modi diversi è qualcosa di molto familiare in ogni ambito della vita, e l'utilità di poter disporre di punti di vista diversi su uno stesso tema è evidente: certi aspetti di un fenomeno possono apparirci più chiaramente adottando un certo punto di vista mentre altri possono essere più efficacemente investigati adottandone un altro.

Per restare in ambito matematico, pensate alla geometria analitica: essa fornisce un ponte che permette di studiare le forme geometriche elementari in maniera algebrica attraverso le equazioni ad esse associate, e viceversa di avere un'intuizione geometrica nel lavorare su tali equazioni. Più in generale, la teoria dei 'ponti' topos-teoretici fornisce un quadro per studiare in modo profondo le relazioni tra teorie matematiche differenti.

Alla luce della distinzione tra sintassi e semantica, possiamo interpretare l'esistenza di punti di vista diversi su uno stesso tema come l'esistenza di sintassi differenti aventi una semantica comune.

Confronti ed invarianti

Nel confrontare oggetti diversi, siamo interessati ad identificare gli aspetti che essi hanno in comune, ovvero gli invarianti, per poter in particolare effettuare trasferimenti di conoscenze tra loro.

In alcuni casi, si possono identificare invarianti attraverso un processo di astrazione che permette di identificare delle categorie in cui entrambi gli oggetti possono essere inseriti e le cui proprietà si specializzano a proprietà dei due oggetti.

Tuttavia, i casi più interessanti sono quelli in cui i due oggetti non possono essere messi in relazione tra loro direttamente attraverso il loro inserimento in una categoria comune, magari perchè sono di natura molto diversa tra loro. In tali situazioni, è opportuno ricorrere al concetto di 'oggetto ponte'.

Nel primo caso, infatti, si realizzerà un'unificazione basata sull'omologazione, mentre nel secondo la diversità non sarà annacquata nell'astrazione, bensì valorizzata all'interno di un'autentica morfogenesi.

L'idea di ponte

Supponendo di voler confrontare due oggetti a e b, immaginate di riuscire ad associare ad a un oggetto $f(a)$ attraverso una certa 'costruzione' f e analogamente di poter associare a b un oggetto $g(b)$ attraverso una 'costruzione' g, e che gli oggetti $f(a)$ e $g(b)$ siano legati da una certa relazione di equivalenza $\simeq$. Allora essi possono essere visti come due rappresentazioni distinte di uno stesso oggetto u, equivalente da un lato a $f(a)$ e dall'altro a $g(b)$, che può essere utilizzato come oggetto ponte tra a e b nel modo seguente:

$$f(a) \simeq u \simeq g(b)$$

$$a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b$$

Per ogni proprietà P dell'oggetto u che è invariante rispetto alla data relazione di equivalenza $\simeq$, possiamo cercare di riformulare in termini di a la condizione che $f(a)$ soddisfi P e dall'altro lato in termini di b la condizione che $g(b)$ soddisfi P, ottenendo nel primo caso una proprietà U_a di a e nel secondo una proprietà V_b di b. Le proprietà U_a e V_b risulteranno equivalenti tra loro in quanto manifestazioni differenti di un'unica proprietà, ovvero P, definita sull'oggetto ponte u.

Relazioni di equivalenza

- Ricordiamo che una relazione di equivalenza è una relazione tra elementi di un insieme che soddisfa le propriétà fondamentali della relazione di uguaglianza, ovvero la riflessività, la simmetria e la transitività.
- Dato un insieme X e una relazione di equivalenza R su X, possiamo costruire l'insieme quoziente X/R, i cui elementi sono le classi di equivalenza di elementi di X rispetto alla relazione R.
- Se si vuole trasferire informazione tra oggetti legati da una certa relazione di equivalenza (ovvero appartenenti ad una medesima classe di equivalenza), è di fondamentale importanza identificare (e possibilmente classificare) le proprietà degli oggetti che sono invarianti rispetto a tale relazione di equivalenza.
- A seconda dei casi, questo può essere un problema trattabile oppure di straordinaria complessità.

Realizzare classi di equivalenza

Definizione

Dati due insiemi I e O, e due relazioni di equivalenza $\simeq_I$ e $\simeq_O$ rispettivamente su I e su O, una costruzione invariante $f : (I, \simeq_I) \to (O, \simeq_O)$ è una funzione $f : I \to O$ che rispetta le relazioni di equivalenza (ovvero tale che se $x \simeq_I y$, allora $f(x) \simeq_O f(y)$).
Diciamo che f è conservativa se riflette le relazioni di equivalenza (ovvero se $f(x) \simeq_O f(y)$, allora $x \simeq_I y$).

Definizione

Data una costruzione invariante $f : (I, \simeq_I) \to (O, \simeq_O)$, un ponte che collega due oggetti $x, y \in I$ tali che $x \simeq_I y$ è un oggetto $b \in O$ tale che $b \simeq_O f(x)$ e $b \simeq_O f(y)$:

$$\begin{tikzcd} & f(x) \simeq_O b \simeq_O f(y) \arrow[dr, dash, dashed] & \\ x \arrow[ur, dash, dashed] & & y \end{tikzcd}$$

Realizzare classi di equivalenza

- Data una costruzione invariante conservativa $f : (I, \simeq_I) \to (O, \simeq_O)$, gli oggetti ponte in O, considerati a meno di $\simeq_O$-equivalenza, possono essere pensati come oggetti classificanti, dal momento che possono essere visti come rappresentanti canonici di classi di equivalenza per la relazione $\simeq_I$.
- L'importanza dei ponti risiede nel fatto che, a patto che la costruzione invariante $f : I \to O$ si comporti sufficientemente bene tecnicamente nel permettere riformulazioni di proprietà di (risp. costruzioni su) $f(z)$ che sono $\simeq_O$-invarianti in termini di z (per oggetti z in I), essi possono essere usati come mezzi per trasferire informazione tra oggetti in I che stanno in relazione $\simeq_I$ tra di essi.
- Ovviamente, disporre di un ponte è particolarmente utile nel classificare proprietà $\simeq_I$-invarianti in casi in cui risulti più facile lavorare con oggetti di tipo O piuttosto che con oggetti di tipo I, oppure quando la relazione $\simeq_O$ è più trattabile della relazione $\simeq_I$.

Uno o molteplice?

- Un oggetto può essere pensato come la collezione di tutte le sue *presentazioni*. Tra tali presentazioni sussiste una fondamentale relazione di equivalenza: quella di presentare il medesimo oggetto.

- Ogni oggetto può quindi giocare il ruolo di 'ponte' tra sue differenti presentazioni.

- Noi 'accediamo' ad un oggetto attraverso la molteplicità delle sue presentazioni, ma gli oggetti stessi sono di fatto classi di equivalenza di presentazioni.

Generazione da una sorgente

- Ogni oggetto, in virtù della sua stessa esistenza, genera un fascio di percezioni (o 'presentazioni') coerenti tra loro.

  Viceversa, in presenza di relazioni di coerenza tra percezioni differenti di uno stesso fenomeno, è scientificamente ragionevole (in un'ottica 'minimalista') supporre l'esistenza di qualcosa che 'generi' tali percezioni e possa essere quindi considerato ontologicamente responsabile per le relazioni di coerenza esistenti tra di esse.

- Il linguaggio delle categorie è particolarmente adatto per esprimere relazioni di coerenza. Più specificamente, la nozione di fascio esprime robuste relazioni di coerenza di tipo "locale-globale" permettendo di definire entità 'globali' a partire da insiemi di dati 'locali' tra loro compatibili.

Il paradigma di Yoneda

- Dato un oggetto c di una categoria $\mathscr{C}$, un elemento generalizzato di c è una freccia in $\mathscr{C}$ con codominio c.
- Vi è un funtore

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, c) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

  canonicamente associato a c, detto il funtore rappresentato da c, che associa a ogni oggetto a di $\mathscr{C}$ l'insieme degli elementi generalizzati di c di dominio a (ovvero le frecce da a a c) e agisce sulle frecce nel modo ovvio.
- Un funtore (controvariante su $\mathscr{C}$ a valori negli insiemi) si dice rappresentabile se è isomorfo ad un funtore della forma $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, c)$ per qualche oggetto c di $\mathscr{C}$.
- L'immersione di Yoneda identifica un oggetto c, a meno di isomorfismo, con il funtore rappresentabile corrispondente $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, c)$, ovvero con il funtore dei suoi elementi generalizzati.

Conclusioni

- Nel contesto di un oggetto c di una categoria $\mathscr{C}$, è naturale pensare ad un elemento generalizzato di c come ad un punto di vista su c. L'immersione di Yoneda esprime quindi un'identificazione naturale tra un oggetto c e la collezione dei suoi elementi generalizzati (vista come funtore controvariante su $\mathscr{C}$ a valori negli insiemi), dando una suggestiva incarnazione matematica al principio che un oggetto possa essere identificato con l'insieme dei punti di vista su di esso.

- Come osservato sopra, possiamo anche pensare ad ogni presentazione o percezione di un oggetto come ad un punto di vista su di esso. Gli oggetti appaiono quindi come classi di equivalenza di presentazioni (o percezioni) tra loro coerenti; anche in questo senso, ogni oggetto si identifica con la collezione di tutti i punti di vista su di esso.

Per approfondire

O. Caramello
Grothendieck toposes as unifying 'bridges': a mathematical morphogenesis,
di prossima pubblicazione nel libro "Philosophy of Mathematics. Objects, Structures, and Logics" (Springer, 2020).