Chapitre V

La « notion unificatrice » de topos

Olivia Caramello

1 — Introduction

Je vais parler d'un concept introduit par Grothendieck, le concept de topos, et de son rôle unificateur en mathématiques. Dans le titre de cet exposé, l'expression « notion unificatrice » est due à Grothendieck lui-même, elle se trouve dans *Récoltes et Semailles* [Grothendieck 1986], le fameux livre autobiographique du mathématicien dans lequel il mène une vaste réflexion sur son œuvre mathématique ainsi que sur la réception de celle-ci par la communauté mathématique de son époque.

Le thème de l'unification occupe une place importante dans ce texte et il apparaît, en particulier, en relation avec la notion de topos comme dans le remarquable passage suivant :

> C'est le thème du topos qui est ce « lit » ou cette « rivière profonde » où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures « discontinues » ou « discrètes ».
> Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse par un même langage riche en résonances géométriques, une « essence » commune à des situations des plus éloignées les unes des autres provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques.

Le caractère le plus frappant de cet extrait réside dans la dimension universelle que Grothendieck attribue aux topos, universalité extrêmement rare à un tel niveau en mathématiques. Il est en effet très difficile de pouvoir fabriquer le même type d'objet à partir de situations mathématiques des plus diverses, et ce de façon à extraire l'essence de chaque situation. C'est, selon Grothendieck, ce que les topos permettent et réalisent.

Comme il l'annonce, et nous y reviendrons, les exemples abondent : des topos apparaissent naturellement dans des cadres analytiques, géométriques, topologiques, algébriques etc., et, évidemment, en lien avec la théorie des catégories, les topos étant eux-mêmes des catégories. C'est d'ailleurs l'une des unifications les plus profondes établies par la notion : celle entre la théorie des catégories et la topologie à travers l'intuition première et fondamentale de Grothendieck interprétant tout espace topologique par l'intermédiaire de sa catégorie des faisceaux d'ensembles. C'est historiquement cette intuition qui mena Grothendieck à l'introduction des topos et depuis elle aura émergé de divers paysages, par des constructions variées, jusqu'à un niveau de généralité impressionnant puisque, par exemple, on peut associer des topos à des théories mathématiques, au sens de la logique.

Il est alors naturel de se poser la question suivante : *Puisque l'on peut associer, d'une façon essentielle, des topos à une telle variété de situations, est-ce que cette unification peut prendre un sens substantiel et dynamique* ?

Plus précisément, serait-il possible d'utiliser cette unification pour réaliser des **transferts** de connaissances d'un contexte à l'autre ?

Cette question a été — et demeure — ma préoccupation principale depuis mes recherches doctorales jusqu'à aujourd'hui : essayer de réaliser cette aspiration d'unification à travers des méthodes qui permettraient de faire de cette unification un outil technique établissant des « ponts » entre diverses théories et donc permettant de nouvelles approches de problèmes mathématiques donnés.

Avant d'entrer dans les détails, je souhaite présenter les thèmes que nous allons aborder. Tout d'abord, je voudrais parler de la nature multiforme des topos. En effet, les topos se révèlent être des objets centraux en mathématiques, au sens qu'ils permettent d'être considérés avec profit selon plusieurs points de vue différents. On compte trois points de vue classiques :

- Celui des topos comme métamorphose du concept d'espace, soit la conception originaire de Grothendieck.
- Celui introduit par les logiciens qui interprètent les topos comme des univers mathématiques dotés d'une logique interne propre, dans lesquels il est possible de considérer des modèles de théories mathématiques comme les théories du premier ordre ou même des théories d'ordres supérieurs et d'essayer de classifier ces modèles.
- Enfin celui des topos vus comme espaces classifiants pour certains types de structures, thème introduit de manière informelle par Grothendieck et précisé grâce aux travaux des logiciens catégoriciens dans les années soixante-dix.

J'évoquerai ensuite succinctement la réception par la communauté mathématique de la notion de topos et, en particulier, la réception de la vision unificatrice que Grothendieck entrevoit. Ce thème s'avérera intéressant à la fois d'un point de vue philosophique et sociologique. J'ai sélectionné à ce sujet quelques citations de *Récoltes et Semailles* dans lesquelles Grothendieck parle de la difficulté que la communauté mathématique a eue — et continue partiellement à avoir — à entendre ce message d'unification qu'il portait. En particulier, nous nous demanderons quels furent les obstacles à la compréhension des topos comme outils d'unification en opposition à leur compréhension comme outils techniques, par exemple en lien avec des questions — aussi motivantes pour Grothendieck — liées à la cohomologie étale. On constatera qu'à l'aspect visionnaire de Grothendieck, les mathématiciens de son temps auront préféré la dimension « pragmatique » des topos avec pour finalité la seule résolution de problèmes difficiles.

Je donnerai ensuite une idée de l'utilisation que l'on peut faire des topos de Grothendieck comme « ponts unifiants », c'est-à-dire comme des objets utiles pour effectuer des transferts entre des théories ou situations mathématiques différentes, telle que je l'ai conçue et développée depuis mes études de doctorat. Je donnerai à la fois les principes-clés de cette approche, qui me semble prolonger celle de Grothendieck d'une façon naturelle, mais aussi quelques exemples concrets.

Je conclurai enfin par quelques indications sur les travaux futurs à mener dans cette direction.

2 — La nature multiforme des topos

Depuis leur introduction par Grothendieck dans les années soixante, les topos sont apparus, avec des approches variées, dans l'interprétation catégorique de théories diverses aux confins de la géométrie, de l'algèbre et de la logique. Comme nous l'avons déjà évoqué, un topos de Grothendieck peut alternativement être interprété comme un espace topologique généralisé, un univers mathématique ou encore une théorie modulo une certaine relation d'équivalence dite « équivalence de Morita » (1). Rappelons brièvement chacun de ces différents points de vue.

(1) Il s'agit de la relation qui identifie deux théories précisément quand ils ont le même topos classifiant.

3 — Les topos comme espaces topologiques généralisés

À ce sujet, on doit commencer par une précision. Grothendieck, plutôt que d'espace généralisé, parle de « métamorphose » de la notion d'espace topologique. En effet, les topos ne constituent pas techniquement une stricte généralisation des espaces topologiques ; pour une équivalence vraie, on doit se restreindre à une classe particulière d'espaces topologiques, appelés espaces *sobres*. Fort heureusement, sans quoi l'intérêt en aurait été atténué, les espaces sobres forment une vaste classe d'espaces topologiques qui comprend la plupart de ceux qui apparaissent naturellement en mathématiques. Les topos généralisent au sens strict les espaces topologiques sobres [(2)]. Quoi qu'il en soit, ce n'est pas réellement la dimension de généralisation qui est intéressante mais plutôt celle de métamorphose : le fait de pouvoir penser des espaces topologiques dans la théorie des catégories. Cela a des conséquences énormes puisque, d'un point de vue technique, un espace topologique est quelque chose de très différent d'une catégorie. D'autant plus qu'en termes de structure, les topos sont des catégories extrêmement riches alors qu'un « simple » espace topologique ne laisse que peu de latitude aux manipulations algébriques ou structurelles. Avec les topos, on change véritablement de monde et le terme choisi par Grothendieck de « métamorphose » est particulièrement adapté.

Cette première approche de la notion de topos a été introduite par Grothendieck au début des années soixante dans le séminaire du Bois Marie ; elle apparaît dans le premier volume du traité SGA 4. On trouve dans ce livre le développement des bases de la théorie qui se fonde sur plusieurs idées-clés dont la première, celle de faisceau, remonte à Leray. Il s'agit de penser les espaces topologiques à travers leurs catégories de faisceaux associées. Selon Grothendieck, la notion de topos est apparue en allant « jusqu'au bout » de l'intuition de Leray. L'idée directrice est la suivante.

Grothendieck se donne un espace topologique X auquel il associe sa catégorie $\mathbf{Sh}(X)$ des faisceaux. Il s'agit d'une catégorie

(2) X est sobre si pour tout fermé non vide A qui ne s'écrit pas comme réunion propre de deux fermés, il existe un unique point x tel que A soit le plus petit fermé contenant x.
Le topos des faisceaux sur un espace topologique sobre détermine cet espace, à homéomorphisme près. C'est en ce sens qu'on peut dire que la notion de topos généralise celle d'espace topologique.

dont les objets sont les faisceaux d'ensembles sur X et les morphismes sont les transformations naturelles entre ses faisceaux vus comme des foncteurs. La profondeur de cette idée est facile à illustrer : tout d'abord, les propriétés topologiques fondamentales de X — connexité, compacité, etc. — peuvent être « lues » dans [(3)] $\mathbf{Sh}(X)$, on ne perd donc pas d'information topologique en passant d'un espace topologique à sa catégorie de faisceaux d'ensembles. Ensuite, on gagne énormément du point de vue des structures parce que les catégories des faisceaux associées aux espaces topologiques possèdent des propriétés structurelles remarquables : elles ont toutes les limites et colimites, on peut y considérer des espaces de fonctions (appelés aussi « exponentiels ») d'un objet dans un autre, et on y trouve un objet classifiant les sous-objets de la catégorie. D'un point de vue structurel et algébrique, on pourrait parler à propos de $\mathbf{Sh}(X)$ de « monde idéal » : tout existe, on peut y former des quotients, des espaces de fonctions, des coproduits, etc., autrement dit tout ce que l'on est habitué à faire dans le contexte classique des ensembles (à condition, cependant, de ne pas employer de principes non-constructifs, mais nous y reviendrons). En résumé, partant d'un espace topologique relativement « non structuré » on se retrouve avec, en mains, un objet « hyperstructuré » et même « maximalement structuré », illustration de cette « métamorphose » dont parle Grothendieck !

Mais il ne s'est pas contenté de considérer des catégories de cette forme, il a aussi profondément réfléchi à la notion même de faisceau. Il s'est demandé si cette notion n'avait de sens que dans le cadre des espaces topologiques ou alors, potentiellement, dans un autre, plus vaste, allant bien au-delà de la topologie. Bien sûr, la motivation première de ce questionnement est venue des conjectures de Weil, de la nécessité de définir des théories cohomologiques non-classiques, outrepassant le cadre topologique. Ainsi Grothendieck, connaissant la facilité de définir la cohomologie à partir de la catégorie des faisceaux d'ensembles d'un espace topologique, réalisa qu'une notion plus générale de faisceau permettrait de définir des théories cohomologiques nouvelles avec le ferme espoir de trouver, parmi elles, celles qui aideraient à prouver les conjectures de Weil. Et c'est effectivement ce qui s'est passé.

Avant d'aller plus loin dans les réflexions de Grothendieck, prenons le temps de quelques rappels élémentaires sur les notions

(3) « **Sh** » pour *sheaf*, faisceau en anglais.

de préfaisceau et de faisceau. Si X désigne un espace topologique, $\mathscr{O}(X)$ la catégorie des ouverts de X et **Set** la catégorie des ensembles, alors un préfaisceau sur X est un foncteur contravariant

$$\mathscr{O}(X) \longrightarrow \mathbf{Set}$$

ou, de manière équivalente, un foncteur covariant de la catégorie opposée

$$\mathscr{O}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}\,.$$

Ainsi, afin de définir les préfaisceaux sur X, nous n'avons besoin que de la catégorie $\mathscr{O}(X)$ dont les objets sont les ouverts de l'espace X et dont les morphismes sont les inclusions entre ouverts. Cette définition s'avère particulièrement malléable et se généralise sans aucune difficulté aux catégories. Si $\mathscr{C}$ désigne une catégorie quelconque, un préfaisceau sur $\mathscr{C}$ est un foncteur covariant :

$$\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}\,.$$

La notion de faisceau d'ensembles sur un espace topologique X, elle, repose sur les notions de recouvrement et de recollement. Un recouvrement d'un ouvert U au sens topologique usuel est une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telles que chaque U_i est contenu dans U et que $\cup_{i\in I}U_i = U$. Un faisceau sur X est alors un préfaisceau tel que se donner une section sur un ouvert U recouvert par des ouverts U_i équivaut à se donner une famille de sections sur les U_i qui coïncident sur les intersections $U_i \cap U_j$.

La généralisation aux catégories de la notion de faisceau demande une traduction catégorique de la notion de famille couvrante et de la condition de recollement. Elle fut formulée par Grothendieck qui introduisit la notion de topologie de Grothendieck sur une catégorie. Si $\mathscr{C}$ désigne une petite catégorie, c'est-à-dire une catégorie dont les objets et les flèches forment un ensemble, et si c est un objet de $\mathscr{C}$, une famille couvrante de c ne sera rien d'autre qu'une famille de morphismes $c_i \to c$ possédant des propriétés analogues à celles des familles couvrantes d'ouverts topologiques. Plus précisément, on demande que soit associée à tout objet c de $\mathscr{C}$ une collection $J(c)$ d'éléments appelés *cribles* sur c, qui sont des ensembles S de morphismes de $\mathscr{C}$ ayant c pour but et fermés par composition à droite, c'est-à-dire tels que quel que soit f dans S et g morphisme de $\mathscr{C}$ composable avec f, $f \circ g$ appartienne à S.

Une *topologie de Grothendieck* sur $\mathscr{C}$ est alors une fonction J assignant à chaque objet c de $\mathscr{C}$ un ensemble $J(c)$ de cribles sur c de manière à ce que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- (Axiome de Maximalité) Pour tout objet c de $\mathscr{C}$, le crible maximal sur c constitué de toutes les flèches de but c appartient à $J(c)$.
- (Axiome de stabilité par « image réciproque ») Pour tout morphisme $f : d \to c$ dans $\mathscr{C}$ et tout crible S dans $J(c)$, le crible $f^*(S) = \{g : e \to d \mid f \circ g \in S\}$ appartient à $J(d)$. Dans le contexte topologique, c'est bien ce qu'il se passe par distributivité des réunions arbitraires relativement aux intersections finies.
- (Transitivité) Pour tout crible S sur c et tout $T \in J(c)$, si $f^*(S) \in J(\mathrm{dom}(f))$, quel que soit $f \in T$, alors $S \in J(c)$.

Ces conditions sont tout à la fois simples et naturelles et cela explique pourquoi l'on rencontre très facilement, un peu partout en mathématiques, des catégories pouvant être munies de topologies de Grothendieck. Une telle topologie est ce dont on a besoin pour définir les faisceaux sur des catégories :

Définition. *Un faisceau sur une paire* $(\mathscr{C}, J)$ *formée d'une petite catégorie* $\mathscr{C}$ *et d'une topologie de Grothendieck* J *sur* $\mathscr{C}$*, est un préfaisceau* $P : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ *tel que, pour tout crible* $S \in J(c)$ *et toute famille* $\{x_f \in P(dom(f) \mid f \in S\}$ *vérifiant* $P(g)(x_f) = x_{f \circ g}$ *pour tout* $f \in S$ *et tout morphisme* g *de* $\mathscr{C}$ *composable avec* f*, il existe un unique élément* $x \in P(c)$ *tel que* $x_f = P(f)(x)$ *pour tout* $f \in S$.
La catégorie des faisceaux ainsi définie sera notée $\mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed] \arrow[d, squiggly] & \mathbf{Sh}(X) \arrow[d, squiggly] \\ (\mathscr{C}, J) \arrow[r, dashed] & \mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J) \end{tikzcd}$$

Finalement : **un topos de Grothendieck est une catégorie équivalente à une catégorie de faisceaux de type $\mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J)$** [(4)].

Notons qu'une paire $(\mathscr{C}, J)$ comme celui de la définition ci-dessus est appelé *site* par Grothendieck. Terminologie, comme toujours chez lui, subtilement choisie puisqu'elle exprime le caractère *contingent* de cette notion par rapport à la dimension *invariante* des topos. En quelque sorte, un site ne serait qu'une esquisse, une présentation d'une situation alors que le topos est l'objet qui extrait l'essence abstraite de cette situation.

(4) Des caractérisations intrinsèques des topos existent — comme l'a démontré Giraud, par exemple — mais nous n'allons pas nous servir de ces résultats dans cet exposé.

Et, effectivement, un site n'est pas un objet en lui-même, c'est une paire, comme l'esquisse partielle d'un artiste, qui se voit complétée de façon cohérente par la formation de son topos à partir des données du site.

Nous verrons plus loin, et c'est ce qui permettra de se servir des topos comme « ponts », que différents sites peuvent engendrer des topos équivalents au sens des catégories. À ce propos, Grothendieck fait une analogie, certes réductrice mais formellement correcte, avec les groupes (5) qui, comme il est bien connu, peuvent être présentés de différentes manières par générateurs et relations. Il en va de même des topos, qui possèdent plusieurs présentations — en fait, une infinité — par des sites différents, avec cependant bien plus d'expressivité et de liberté pour les sites, que l'on rencontre partout en mathématiques et en logique sous des formes extrêmement variées.

Le fait que des sites différents peuvent engendrer des topos équivalents s'avère très intéressant lorsqu'on réalise que, comme fabriquer des invariants par équivalence de catégories relève presque de la trivialité (toute propriété ou notion formulée naturellement dans le langage catégorique s'avérant forcément invariante), on dispose, en principe, d'une énorme quantité d'invariants que l'on peut définir sur les topos, bien au-delà des invariants classiques comme la cohomologie. Tout invariant peut ainsi être considéré et étudié en termes de différentes présentations par des sites, ce qui donne lieu à une véritable morphogenèse mathématique. En effet, lorsqu'on étudie les différentes manières d'exprimer un même invariant sur divers topos à travers des présentations différentes, on tombe sur une richesse mathématique vraiment extraordinaire. Nous donnerons plus loin quelques exemples.

Avant de considérer l'approche des topos par les logiciens, il est intéressant de voir comment Grothendieck s'exprime à propos de la naissance de l'idée de topos. Dans ses textes littéraires, *Récoltes et Semailles* ou *La clef des songes*, il accorde une grande importance à l'enfance dans sa vision de la vie, des mathématiques et de la création. Dans l'extrait qui suit, il revient sur l'idée « enfantine », innocente, de topos, cette innocence clé de la créativité bien qu'inégalement partagée par ses collègues d'alors :

(5) Bien que réductrice, l'analogie n'est pour autant pas sans fondements. En effet, Grothendieck a lui-même envisagé et étudié les topos comme généralisation des groupes.

> Comme l'idée même des faisceaux (due à Leray), ou celle des schémas, comme toute « grande idée » qui vient bousculer une vision invétérée des choses, celle des topos a de quoi déconcerter par son caractère de naturel, d'« évidence », par sa simplicité (à la limite, dirait-on, du naïf ou du simpliste, voire du « bébête » — par cette qualité particulière qui nous fait nous écrier si souvent : « Oh, ce n'est que ça ! », d'un ton mi-déçu, mi-envieux ; avec en plus, peut-être, ce sous-entendu du « farfelu », du « pas sérieux », qu'on réserve souvent à tout ce qui déroute par un excès de simplicité imprévue. À ce qui vient nous rappeler, peut-être, les jours depuis longtemps enfouis et reniés de notre enfance...

Grothendieck est conscient de l'élégance, de la simplicité, de la naïveté de la notion qu'il introduit mais, en même temps, il en admet le caractère déroutant, par l'imprévu qu'elle représente aux yeux de la communauté mathématique de cette époque.

En fait, Grothendieck s'interroge longuement sur les raisons psychologiques de l'hostilité assez virulente, souvent irrationnelle — et qui persiste dans certains cercles même aujourd'hui — à l'encontre de la notion de topos ; on y reviendra plus loin. Il ajoute notamment :

> Par contre, je ne vois personne d'autre sur la scène mathématique, au cours des trois décennies écoulées, qui aurait pu avoir cette naïveté, ou cette innocence, de faire (à ma place) cet autre pas crucial entre tous, introduisant l'idée si enfantine des topos (ou ne serait-ce que celle des « sites »).

4 — Les topos comme univers

Cette approche a été proposée quelques années après les travaux de Grothendieck par W. Lawvere et M. Tierney. Leur école a étudié les topos de façon axiomatique, comme des catégories à l'intérieur desquelles on peut « faire des mathématiques » grâce en particulier à la sémantique catégorique. Ils ont donc introduit le nouveau point de vue qui consiste à considérer les topos comme des univers mathématiques *alternatifs*, possédant leur propre logique interne, dans lesquels on peut développer des mathématiques.

Afin de donner une image impressionniste, non technique, inspirée du point de vue logique sur les univers mathématiques, nous dirons que les topos ressemblent, *par certains aspects*, à l'univers classique dans lequel nous sommes habitués à travailler et qui est l'univers des ensembles. Ainsi, pour ce qui relève des calculs purs, de l'algèbre, les topos se comportent de manière analogue à l'univers ensembliste : on retrouve dans les uns comme dans l'autre des propriétés formelles fondamentales comme l'existence de limites et de colimites.

Néanmoins des différences essentielles les distinguent, en premier lieu leur logique interne : par exemple la notion de vérité dans un topos n'est pas booléenne en général [6] et on peut rencontrer une grande variété de valeurs de vérité et donc des phénomènes logiques beaucoup plus riches. Les logiques peuvent être très différentes d'un topos à l'autre. Elles possèdent la fertilité des logiques intuitionnistes, constructives, par opposition à la « pauvreté » relative de la logique de Boole.

Par ailleurs, il est possible, grâce à la riche structure catégorique que chaque topos possède, de considérer des modèles de théories mathématiques, par exemple celles du premier ordre, à l'intérieur de n'importe quel topos. Cela a des conséquences immenses, comme de permettre le développement d'une *théorie fonctorielle des modèles*, sur laquelle nous allons revenir. Il est certain, en tout cas, que le champ d'étude potentiel des logiciens spécialistes de la théorie des modèles et qui, jusqu'alors, ne travaillaient que dans le topos ensembliste, s'est vu considérablement enrichi. On peut, aujourd'hui, considérer des théories dans n'importe quel topos, étudier leurs propriétés dans ces nouveaux cadres, faire varier les topos ambiants, les relier fonctoriellement et donc, ouvrir de nouveaux horizons.

Cette grande variété, cette grande flexibilité, offrent la possibilité de construire de nouveaux mondes mathématiques qui permettent d'accueillir (au sens de donner corps à) des concepts qui n'existeraient pas ou ne pourraient peut-être pas s'incarner de façon constructive ou naturelle dans les fondements classiques des mathématiques. Je pense, par exemple, aux infinitésimaux ou encore aux problèmes d'indépendance d'axiomes dans la théorie des ensembles, voire au « forcing »... Ces questions peuvent être traitées de façon très satisfaisante dans le cadre des topos, en exploitant précisément la flexibilité que ceux-ci offrent pour engendrer de nouveaux paysages.

Une fois construit un monde toposique dans lequel le problème qui nous intéresse possède une réalisation, une expression, nous pouvons toujours envisager la possibilité de construire à partir de ce topos, d'autres topos (ou objets) répondant à ce problème et qui fournissent un cadre plus proche de notre intuition. Pour autant, l'existence — avérée — d'un tel topos « solution » est remarquable en soi, puisque s'offre alors à nous un univers dans lequel, pour reprendre un des exemples cités, la question de l'existence ou non

(6) Voir l'exposé d'Alain Connes dans ce même volume.

des infinitésimaux ne se pose pas : ils existent, et pas uniquement dans un topos isolé. Peut-être aura-t-on besoin de l'existence de ces infinitésimaux dans un contexte vérifiant certaines propriétés, mais alors le problème devient plus relationnel qu'absolu, il devient celui de transférer à notre contexte particulier les propriétés d'un topos dans lequel ces infinitésimaux existent. On voit donc que la théorie des topos réalise un élargissement de l'ontologie mathématique qui n'est pas seulement conceptuel, mais techniquement extrêmement puissant.

La possibilité de fonctorialiser la théorie des modèles dans la théorie des topos est, justement, une illustration criante de cette puissance technique. Dans la théorie ensembliste existe une notion classique de modèle de théories du premier ordre, due à Tarski : les sortes, c'est-à-dire les noms de différents types d'objets, y sont interprétées par des ensembles, les symboles de fonction par des applications et les symboles de relation par des sous-ensembles. On obtient ainsi une structure. Un modèle n'est alors autre qu'une structure dans laquelle tous les axiomes de la théorie sont satisfaits.

On peut généraliser cette notion à des topos quelconques, les sortes seront interprétées par des objets du topos, les symboles de fonction par des flèches et, enfin, les symboles de relation par des sous-objets. Quant à la dynamique structurelle engendrée, elle est parfaitement similaire à celle du cas classique (voir [Makkai et Reyes 1977], [Johnstone 2002] ou [Caramello 2018]). On peut alors, grâce à la richesse catégorique des topos, définir inductivement l'interprétation des formules et, avec elle, les modèles toposiques de n'importe quelle théorie, pas seulement du premier ordre bien que nous nous cantonnions ici à ce cas. Cela permet de « *relativiser* » les mathématiques, au sens de les développer relativement à des bases variables : nous n'avons pas un seul univers à disposition dans lequel nous serions obligés de regarder le problème, nous pouvons changer d'univers. Cela ajoute une nouvelle dimension aux mathématiques.

Revenons maintenant sur un point évoqué plus haut et qui mérite quelques précisions. Face à l'immense variété des topos, les questions naturelles à se poser dans un contexte particulier sont donc : « Le topos ensembliste est-il le plus intuitif, le plus adapté, le plus naturel pour envisager ce contexte ? N'existerait-il pas un topos offrant un point de vue privilégié qui illuminerait davantage le problème considéré ? » Nous répondons par l'affirmative à cette dernière question et, effectivement, la théorie des topos classifiants — sujet du paragraphe suivant — permet de donner un sens mathématique précis à cette intuition : il existe toujours un point de vue privilégié que nous pouvons avoir sur une certaine théorie [(7)]. Ainsi, à l'aide de la théorie fonctorielle des modèles, une classification des modèles s'offre à nous. Or, dans l'étude de la relation entre validité dans des modèles et démontrabilité dans la théorie, à se limiter aux modèles ensemblistes, on se heurte au problème suivant : le théorème de complétude de Gödel affirme certes que si une théorie du premier ordre est finitaire *et si l'on décide d'accepter l'axiome du choix*, alors la validité d'une formule fermée du premier ordre dans tous les modèles ensemblistes équivaut à la démontrabilité dans la théorie. Mais afin de prouver cela, on a besoin de forcer, c'est-à-dire d'utiliser un principe non-constructif, l'axiome du choix. Cela donne une indication sur les « déficiences » des modèles ensemblistes dans lesquels syntaxe et sémantique ne se rejoignent pas.

Si, en revanche, on décide d'élargir le champ d'étude au contexte des topos, on trouve un topos particulier, avec un modèle particulier, le *modèle universel* de la théorie, dans lequel se réalise une unification entre syntaxe et sémantique. En effet, ce qui est valide dans ce modèle-là est démontrable dans la théorie et, bien sûr, réciproquement (et cela de façon entièrement constructive). Ainsi, plutôt que de considérer tous les modèles ensemblistes de la théorie pour essayer d'en obtenir une représentation fidèle, on peut se concentrer sur ce modèle universel parfaitement constructif.

C'est une illustration du fait que l'élargissement du cadre mathématique apporte de grands fruits. Une fois identifié le bon point de vue, celui du modèle universel qui vit dans le topos classifiant de la théorie, on peut se permettre de revisiter tous les modèles ensemblistes comme des points du topos classifiant, et donc comme des « déformations » de ce modèle universel.

5 — Les topos comme espaces classifiants

L'intuition de ce dernier point de vue est, une nouvelle fois, due à Grothendieck, bien qu'il ne l'ait pas poussée jusqu'au bout, nous le verrons, particulièrement dans sa réalisation technique. Dans cette direction, les topos sont perçus comme des objets qui incarnent le contenu mathématique ou sémantique des théories du premier ordre d'une forme particulière : celles que l'on peut formuler à

(7) Au moins pour les théories (« géométriques ») du premier ordre.

l'intérieur de la « logique géométrique ». Toute théorie de cette nature se voit associer un topos, appelé son *topos classifiant*, qui, comme le nom l'indique, classifie ses modèles dans n'importe quel topos. La relation d'équivalence qui identifie deux théories ayant le même topos classifiant s'appelle *équivalence de Morita* ou *Morita-équivalence*. Tout topos est le topos classifiant d'une théorie (et, en fait, d'une infinité de théories). On peut alors penser un topos de Grothendieck comme une classe d'équivalence de théories géométriques modulo cette relation d'équivalence de Morita.

Quelle est l'idée derrière la notion de topos classifiant ?

Grothendieck a toujours attribué beaucoup d'importance au paradigme de la représentabilité et lui a donné un rôle central dans ses travaux de géométrie algébrique. En ce sens, il se fonde sur l'idée de Yoneda et de son fameux lemme catégorique, soit : penser un objet, dans une catégorie, à travers les morphismes d'objets quelconques de la catégorie vers cet objet-là. La philosophie du lemme de Yoneda nous amène donc à envisager un objet comme la collection de ses éléments généralisés. En conformité avec ce paradigme, Grothendieck s'est intéressé aux topos du point de vue des structures qu'ils classifient et, à cette fin, il devait donner un sens à la *catégorie des topos*. Les objets de cette catégorie sont, naturellement, les topos. Quant aux morphismes, Grothendieck les définit ainsi : un *morphisme* (*géométrique*) de topos est une paire $f := (f^*, f_*)$ de foncteurs adjoints, plus précisément un foncteur d'image directe f_* (adjoint à droite) et un foncteur d'image inverse f^* (adjoint à gauche), avec la condition que le foncteur d'image inverse *préserve les limites projectives finies* (8).

Dans l'esprit des espaces classifiants, il s'agit alors, dans cette catégorie, de comprendre un topos donné $\mathscr{E}$ en considérant les morphismes géométriques de n'importe quel topos $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$, avec l'idée de déterminer ainsi le topos $\mathscr{E}$ à équivalence près. Cette idée de classification permet de développer un point de vue nouveau sur les topos, que nous allons préciser. Mais avant cela revenons à Grothendieck. On trouve à divers endroits de son œuvre des considérations à propos des topos comme espaces classifiants. Cependant, le texte le plus explicite que l'on puisse trouver à ce

(8) Notons que, puisque l'image inverse est un foncteur adjoint à gauche, il préserve automatiquement les limites inductives arbitraires, alors qu'il ne préserve pas en général les limites projectives quelconques, ni même finies. C'est donc une condition que l'on impose.

sujet est la thèse de son élève M. Hakim « Topos annelés et schémas relatifs » dans laquelle ce point de vue des topos comme espaces classifiants est mis en œuvre dans des cas particuliers. Quatre topos sont étudiés dans ce volume comme topos classifiants de certains types d'anneaux ; par exemple, il est montré que le topos de Zariski classifie les anneaux locaux, le topos étale classifie les anneaux strictement henséliens, etc.

On trouve ensuite des considérations plus générales de Grothendieck sur ce sujet, particulièrement dans SGA 4. Ainsi, des phrases où il se réfère aux topos classifiants des structures « s'exprimant en termes de limites projectives finies et de limites inductives quelconques ». Bien sûr, c'est une expression un peu vague — il s'en rend compte — et se pose le problème de la formalisation de cette intuition.

Si l'intuition est entièrement correcte, elle ne fut matérialisée qu'à l'aide du langage de la logique, que, très probablement, il ne connaissait pas. En effet, selon un paradigme classique de la logique, les formules sont construites inductivement à partir de formules simples, ce qui doit être comparé aux références explicites de Grothendieck à des opérations que l'on répète (les limites projectives finies et colimites quelconques). Il écrit dans SGA 4 (nous soulignons en gras certaines parties) :

> Les propriétés d'exactitude du foncteur d'image inverse u^* d'un morphisme géométrique de topos $u : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ assurent que pour toute espèce de structure algébrique [9] L dont les données peuvent se décrire en termes de données de flèches entre les ensembles de base et des ensembles déduits de ceux-ci par application répétée d'opérations de limites projectives finies et de limites inductives quelconques, et pour tout « objet de $\mathscr{E}'$ muni d'une structure d'espèce L », son image par u^* est munie des mêmes structures. Plutôt que d'entrer dans la tâche peu engageante de donner un sens précis à cet énoncé et de le justifier de façon formelle, nous conseillons au lecteur de l'expliciter et de se convaincre de sa validité pour des espèces de structures telles que celle de groupe, d'anneau, de module sur un anneau, de comodule sur un anneau de bigèbre sur un anneau, de torseur sous un groupe.

En termes de contenu mathématique, cela signifie que pour deux topos $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ et un morphisme géométrique $u : \mathscr{F} \to \mathscr{E}$, le foncteur d'image inverse u^* transforme toute L-structure de $\mathscr{E}$ en une L-structure de $\mathscr{F}$.

C'est une remarque absolument fondamentale qui permet, une fois formalisée, de définir un « (pseudo)foncteur des modèles d'une théorie », pour utiliser la terminologie logique. On retrouve, de manière plus précise, la fonctorialité des modèles évoquée dans le paragraphe précédent. Cela signifie en particulier qu'au lieu d'avoir un seul contexte dans lequel considérer les modèles, nous pouvons faire varier notre topos et, ce faisant, définir un (pseudo)foncteur. Alors, la question des topos classifiants devient celle de la représentabilité de ce (pseudo)foncteur. S'il est représentable, on dit que l'objet qui le représente est le *topos classifiant* pour cette théorie-là.

De plus, un foncteur représentable ne donne pas seulement un objet de la catégorie étudiée mais aussi un élément de la valeur de ce foncteur en cet objet : dans le cadre qui nous intéresse, c'est ce que l'on appellera le *modèle universel de la théorie*.

À la lecture de cet extrait, il est évident que pour Grothendieck l'intuition est très claire, mais il ressent quand même la nécessité d'une meilleure formalisation, et c'est précisément cette « tâche peu engageante » (mais très intéressante) de formalisation de la « logique géométrique » qu'accompliront les logiciens-catégoriciens dans les années soixante-dix, en particulier W. Lawvere, M. Makkai, G. Reyes, A. Joyal, J. Bénabou et J. Cole [(10)].

Plus précisément, dans le langage de la logique, à toute théorie géométrique (du premier ordre) $\mathbb{T}$ on peut associer canoniquement un topos $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$, appelé son *topos classifiant* — au sens qu'il représente son (pseudo)foncteur des modèles — et qui incarne son « cœur sémantique ».

Le topos $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$ est caractérisé par la propriété universelle suivante : pour tout topos de Grothendieck $\mathscr{E}$ on a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Geom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}_{\mathbb{T}}) \simeq \mathbb{T}\text{-mod}(\mathscr{E})$$

naturelle en $\mathscr{E}$, où $\mathbf{Geom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}_{\mathbb{T}})$ désigne la catégorie des morphismes géométriques $\mathscr{E} \to \mathscr{E}_{\mathbb{T}}$ et $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathscr{E})$ est la catégorie des modèles de $\mathbb{T}$ dans $\mathscr{E}$.

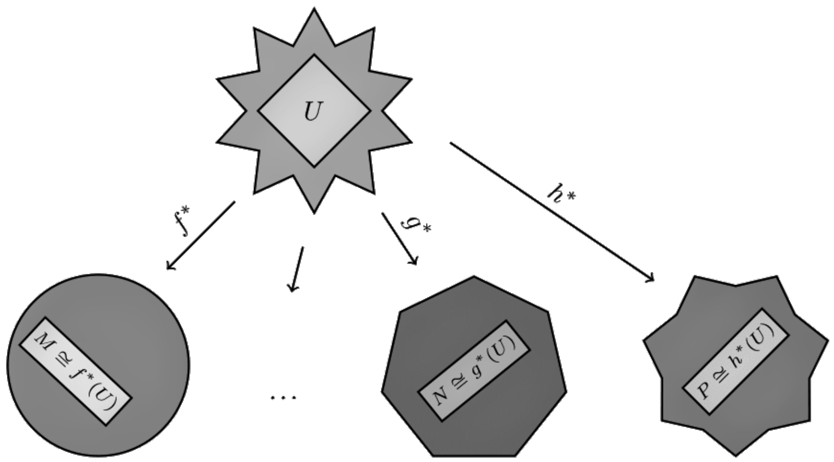
Ainsi, un topos qui vérifie cette propriété universelle est uniquement déterminé à équivalences catégoriques près. On peut donc bien parler *du* topos classifiant d'une théorie géométrique.

Dans la figure suivante les formes géométriques colorées représentent des topos dans lesquels vivent des modèles U, M, N, P de la théorie ; en particulier, le diamant jaune représente le topos classifiant de la théorie et U le modèle universel en son intérieur. Ce modèle est l'image de l'identité de $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$ par l'équivalence

$$\mathbf{Geom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}_{\mathbb{T}}) \simeq \mathbb{T}\text{-mod}(\mathscr{E}) .$$

(10) Voir par exemple [Makkai et Reyes 1977].

Les modèles M, N, P, etc. sont donc tous des images de U par des foncteurs d'image inverse f^*, g^*, h^*, etc. de morphismes géométriques f, g, h, etc. des topos où les modèles vivent vers le topos classifiant $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$. Ils apparaissent donc comme des « déformations » du modèle universel de la théorie.



Topos classifiant

La figure met en évidence le fait que le topos classifiant d'une théorie est le lieu privilégie où se déploient les symétries de la théorie, son « centre de symétrie ». Il constitue l'espace où les invariants fondamentaux de la théorie (ceux qui dépendent uniquement de son contenu sémantique, indépendamment de ses différentes présentations syntactiques) sont naturellement définis. On voit aussi l'avantage d'avoir élargi notre contexte pour la considération des modèles de la théorie du cadre ensembliste habituel à celui des topos. En effet, un tel résultat de classification de modèles n'existe pas dans le contexte restreint des ensembles.

Nous n'allons pas rentrer dans les détails techniques de la définition de la logique géométrique ; limitons-nous à dire qu'une théorie géométrique est une théorie écrite dans un langage du premier ordre dont les axiomes sont tous de la forme

$$(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$$

où ϕ et ψ dont des formules *géométriques*, c'est-à-dire obtenues à partir des formules atomiques en utilisant seulement des conjonctions finitaires, des disjonctions infinitaires (indexées par un ensemble arbitraire) et des quantifications existentielles.

L'expression ($\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$) signifie que pour toutes les valeurs des variables $\vec{x}$, $\phi(\vec{x})$ implique $\psi(\vec{x})$. On remarque que n'importe quel foncteur d'image inverse f^* d'un morphisme géométrique envoie des modèles d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$ dans des modèles de $\mathbb{T}$, car l'interprétation des formules atomiques et des conjonctions finitaires s'exprime en termes de limites finies, alors que les disjonctions infinitaires et les quantifications existentielles s'interprètent en termes de colimites arbitraires et limites finies.

La forme apparemment très particulière et restrictive des axiomes d'une théorie géométrique ne doit pas induire en erreur sur le niveau de généralité de ce système logique ; en effet, grâce à un processus appelé *Morleyisation*, on peut associer canoniquement à n'importe quelle théorie finitaire du premier ordre une théorie géométrique finitaire ayant essentiellement les mêmes modèles ensemblistes. De plus, la nature infinitaire de la logique géométrique permet d'exprimer et d'étudier formellement beaucoup de propriétés naturelles qui n'admettent pas une axiomatisation finitaire (pensons, par exemple, à la propriété d'un élément d'un anneau d'être nilpotent, qui est exprimable de façon infinitaire mais pas finitaire dans le langage de la théorie des anneaux, ou à la notion d'unité forte pour un groupe réticulé...).

Comme on l'imagine aisément, des théories géométriques apparaissent dans tous les domaines des mathématiques. Le théorème d'existence des topos classifiants est donc un résultat d'une généralité extraordinaire, puisqu'il affirme que tous les (pseudo)foncteurs de la forme $\mathscr{E} \rightsquigarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathscr{E})$, où $\mathbb{T}$ est une théorie géométrique quelconque, sont représentables. Habituellement en mathématiques, démontrer que certains foncteurs riches en information sont représentables est exceptionnel et a des conséquences profondes. Pensons par exemple à la théorie des schémas, où les théorèmes de représentabilité sont relativement rares et importants. Ici au contraire, l'existence d'un topos classifiant qui représente le foncteur des modèles de n'importe quelle théorie géométrique est connue à l'avance si bien qu'affiner et approfondir cette connaissance consiste à étudier ce topos classifiant et ses propriétés. On n'est plus avec un problème d'existence mais d'étude d'un objet dont l'existence est acquise. D'autre part, la notion de morphisme (géométrique) de topos est particulièrement souple, ce qui fait qu'il y a « assez de morphismes » pour représenter des foncteurs riches comme ceux des modèles d'une théorie géométrique ; notons que, en revanche, la notion de morphisme de schémas est plus rigide.

6 — La réception des topos

Grothendieck se plaint à maintes reprises dans *Récoltes et Semailles* de la mauvaise réception des topos dans la communauté mathématique, qu'il impute essentiellement au manque de vision de ses anciens collègues et élèves. Il écrit par exemple :

> J'ai su peu à peu, je ne saurais trop dire comment, que plusieurs notions qui faisaient partie de la vision oubliée, étaient non seulement tombées en désuétude, mais étaient devenues, dans un certain beau monde, objet d'un condescendant dédain. Tel a été le cas, notamment, de la notion unificatrice cruciale de topos, au cœur même de la géométrie nouvelle — celle-là même qui fournit l'intuition géométrique commune pour la topologie, la géométrie algébrique et l'arithmétique — celle aussi qui m'a permis de dégager aussi bien l'outil cohomologique étale et ℓ-adique, que les idées maîtresses (plus ou moins oubliées depuis, il est vrai...) de la cohomologie cristalline. À vrai dire, c'était mon nom même, au fil des ans, qui insidieusement, mystérieusement, était devenu objet de dérision — comme un synonyme de vaseux bombinages à l'infini (tels ceux sur ces fameux « topos », justement, ou ces « motifs » dont il vous rebattait les oreilles et que personne n'avait jamais vus...), de découpage de cheveux en quatre à longueur de mille pages, et de pléthorique et gigantesque bavardage sur ce que, de toute façon, tout le monde connaissait déjà depuis toujours et sans l'avoir attendu...

Un type de réaction si irrationnelle face à un concept profond et fécond comme celui de topos pourrait paraître invraisemblable. Et pourtant, l'analyse de Grothendieck est tristement lucide. Je peux le dire aussi à la lumière de mon expérience personnelle en tant que chercheuse travaillant sur les topos dans le but d'exploiter leur pouvoir unifiant (trente ans après ces déclarations !) : j'ai été victime pendant des années de dénigrements exactement du même genre que ceux dénoncés par Grothendieck, au point que j'ai été contrainte d'entreprendre une initiative de clarification publique pour montrer le mal fondé de telles accusations et rétablir ma réputation scientifique [11] : en l'occurrence, le terme utilisé pour discréditer une partie de mon travail comme quelque chose que, « de toutes façons, tout le monde connaissait déjà depuis toujours et sans l'avoir attendu » était celui très ambigu et dangereux de « folklore ». [12]

(11) Le lecteur intéressé pourra trouver plus d'informations sur cette controverse à `www.oliviacaramello.com/Unification/InitiativeOfClarificationResults.html`

(12) Le lecteur désireux d'approfondir la dimension sociologique et éthique de ce type d'accusations est renvoyé à l'article « Epistemic injustice in mathematics » par C.J. Rittberg, F. Stanley Tanswell et J-P. Van Bendegem (*Synthese*, Springer, 2018), qui analyse en particulier mon cas personnel.

Voici d'autres extraits de *Récoltes et Semailles* concernant la réception contrariée des topos :

> Pendant quinze ans (depuis mon départ de la scène mathématique), l'idée unificatrice féconde et le puissant outil de découverte qu'est la notion de topos, est maintenue par une certaine mode au ban des notions réputées sérieuses. Rares encore aujourd'hui sont les topologues qui aient le moindre soupçon de cet élargissement potentiel considérable de leur science, et des ressources nouvelles qu'il offre.

Cet extrait est particulièrement intéressant car il montre la conception que Grothendieck avait des topos comme des objets de nature non seulement mathématique mais *métamathématique*, en tant que notions capables de guider l'exploration mathématique et de conduire à l'introduction de nouveaux concepts et résultats.

Dans le passage suivant Grothendieck souligne le caractère abstrait du concept de topos comme un élément d'explication pour la réticence des mathématiciens à le prendre au sérieux :

> Vu le dédain avec lequel certains de mes ex-élèves [...] se sont plu à traiter cette notion unificatrice cruciale, celle-ci s'est vue condamnée depuis mon départ à une existence marginale. [...] les topos [...] se rencontrent pourtant à tous les pas en géométrie — mais on peut bien sûr fort bien se passer de les voir, comme on s'est passé pendant des millénaires de voir des groupes de symétries, des ensembles, ou le nombre zéro.

Cet extrait apparaît d'autant plus remarquable si l'on considère que, d'un point de vue logique, le passage d'un site au topos correspondant peut se décrire comme une complétion par l'ajout d'objets « imaginaires » (au sens de la théorie des modèles), de façon analogue à ce qui se passe quand on complète un système numérique, comme par exemple l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers positifs en le groupe $\mathbb{Z}$ des nombres relatifs, ou l'anneau $\mathbb{Z}$ en le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, ou encore le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels en le plan complexe $\mathbb{C}$. Dans chacun de ces cas, on ajoute des entités dont la nature peut sembler plus abstraite que celle des entités de départ, mais l'intérêt de telles constructions réside notamment dans les nouvelles possibilités de calcul qu'elles ouvrent, et qui reposent sur l'existence de davantage de *structures* et de *symétries* dans le contexte élargi que dans celui d'origine (pensez par exemple à la symétrie par rapport au zéro dans les nombres relatifs ou au théorème fondamental de l'algèbre, dont il n'y a pas d'analogue dans le contexte restreint des nombres réels, ou encore au fait que $\mathbb{N}$ est un simple monoïde alors que $\mathbb{Z}$ est un anneau et $\mathbb{Q}$ est un corps). Grothendieck ironise sur le fait qu'on peut bien sûr se passer de voir ces objets

« imaginaires » et faire comme s'ils n'existaient pas, avec le résultat de se priver, sans en avoir conscience, de toutes les ressources conceptuelles et techniques qu'ils offrent. En effet, si l'on regarde le développement de l'école de géométrie algébrique fondée par Grothendieck dans les décennies qui ont suivi le départ du Maître, on s'aperçoit qu'il y a eu un emploi et une élaboration très pointus des techniques cohomologiques forgées par Grothendieck sans que cela ait été accompagné par un développement systématique de la théorie des topos sous-jacente. En fait, la plupart des géomètres « héritiers » de Grothendieck ont privilégié les sites, en tant qu'objets qui expriment de façon concrète le contenu géométrique d'une situation, et les invariants cohomologiques des catégories de faisceaux associées, tout en « négligeant » les topos, qui sont pourtant les espaces généralisés sur lesquels ces invariants sont naturellement définis. Nous reviendrons là-dessus plus tard.

7 — La vision et l'outil

Les extraits suivants clarifient bien cette dichotomie entre la réception des outils cohomologiques forgés par Grothendieck et la récusation de la vision qui avait inspiré leur développement :

> L'ensemble des deux séminaires consécutifs SGA 4 et SGA 5 (qui pour moi sont comme **un seul** « séminaire ») développe à partir du néant, à la fois le puissant instrument de synthèse et de découverte que représente le langage des topos, et **l'outil** parfaitement au point, d'une efficacité parfaite, qu'est la cohomologie étale — mieux comprise dans ses propriétés formelles essentielles, dès ce moment, que ne l'était même la théorie cohomologique des espaces ordinaires.

> Ces deux séminaires sont pour moi indissolublement liés. Ils représentent, dans leur unité, à la fois la **vision**, et **l'outil** — les topos, et un formalisme complet de la cohomologie étale. Alors que la vision reste récusée encore aujourd'hui, l'outil a depuis plus de vingt ans profondément renouvelé la géométrie algébrique dans son aspect pour moi le plus fascinant de tous — l'aspect « arithmétique », appréhendé par une intuition, et par un bagage conceptuel et technique, de nature « géométrique ».

> L'opération « Cohomologie étale » a consisté à **discréditer la vision** unificatrice des topos (comme du « non sens », du bombinage, etc.)... et d'autre part, à **s'approprier l'outil**, c'est-à-dire la paternité des idées, techniques et résultats que j'avais développés sur le thème de la cohomologie étale.

8 — « Sites sans topos », « topos sans sites »

Comme on l'a dit plus haut, la plupart des géomètres algébristes après Grothendieck ont essentiellement délaissé la notion de topos en se concentrant sur l'étude de théories cohomologiques particulières associées à des sites géométriques spécifiques, probablement dans un souci de pragmatisme. Cette pratique consistant à négliger les topos en faveur des sites — que l'on pourrait résumer par la formule « *sites sans topos* » — a été largement partagée au sein de cette communauté. Par conséquent, même dans le contexte particulier des invariants cohomologiques, les nouvelles possibilités de calcul résultant de l'existence de présentations différentes pour les topos en question, relevant en principe de secteurs différents des mathématiques (voir la prochaine section pour plus d'informations sur la technique des topos comme « ponts »), n'ont pas été exploitées autant qu'elles auraient pu l'être.

D'autre part, les logiciens catégoriciens, après avoir défini la logique géométrique dans les années soixante-dix, ont essentiellement délaissé l'étude des topos classifiants, pour s'occuper d'autres thèmes comme celui des « topos élémentaires » de W. Lawvere et M. Tierney. Il s'agit d'un type de catégories qui se distingue de celui des topos de Grothendieck notamment par le fait d'être finiment axiomatisable dans le langage des catégories. Cependant, les topos élémentaires n'ont pas toutes les colimites et il ne sont pas toujours représentables par des sites (par définition, un topos qui admet un site de définition est un topos de Grothendieck). Telles ont été, dans cette école, la détermination à délaisser les sites en faveur d'une approche exclusivement axiomatique des topos fondée sur la logique finitaire, et la conviction que cette théorie aurait dû remplacer celle des topos de Grothendieck, que, dans la littérature qu'elle a produite, le terme même de *topos*, dû a Grothendieck et utilisé jusqu'alors pour désigner le concept de catégorie équivalente à une catégorie de faisceaux (d'ensembles) sur un site, s'est mis [13] à désigner un concept différent et plus général, celui de catégorie cartésiennement fermée avec les limites finies et un classificateur des sous-objets (ce qu'aujourd'hui on appelle « topos élémentaire » pour le distinguer de la notion de topos de Grothendieck). Notons que dans un « topos élémentaire » arbitraire on ne peut faire proprement ni de la géométrie ni de la topologie, du fait que ce type de catégorie n'a pas nécessairement les

(13) d'une façon inappropriée à la fois du point de vue historique et mathématique selon l'avis d'un certain nombre de collègues et le mien

colimites arbitraires. On n'a pas non plus de dualité entre cette classe de catégories et une classe de théories du premier ordre comme dans le cas des topos classifiants ; en effet, les topos élémentaires classifient les modèles des théories intuitionnistes des types d'ordre supérieur, d'une façon toutefois assez rigide car les foncteurs qui interviennent dans cette classification sont ceux qui préservent toute la structure « logique » de ces catégories (les exponentiels et le classificateur des sous-objets) ; en fait, ces foncteurs, à la différence des morphismes géométriques des topos (qui sont induits notamment par tout morphisme ou comorphisme de sites, et en particulier par toute application continue d'espaces topologiques et tout homomorphisme de groupes), ne surgissent pas naturellement dans la pratique mathématique.

Le choix d'étudier les topos sans référence à leurs présentations (une approche que l'on pourrait résumer par la formule « *topos sans sites* ») a privé cette école de la possibilité d'obtenir des *applications* profondes des topos dans des contextes mathématiques 'concrets'. En effet, sans les sites, ou plus généralement sans les présentations des topos, on n'a pas la possibilité d'incarner par un topos un contenu mathématique issu d'un problème ou d'une situation spécifique (dans un certain domaine de mathématique) que l'on souhaiterait étudier, et donc de pouvoir lui appliquer des techniques topos-théoriques. C'est un peu comme voler dans un avion qui se trouve trop haut pour pouvoir encore discerner le sol et dire quelque chose d'intéressant à son propos.

Le refus de l'*ambiguïté essentielle* résultant du fait qu'un topos est associé à une infinité de présentations différentes, a été justifié par certains membres de cette école comme un refus de travailler avec les topos par le biais de leurs présentations plutôt que de façon intrinsèque (ou axiomatique). Cette préoccupation est tout à fait raisonnable ; cependant, il ne s'agit pas ici d'étudier les topos à travers les sites, mais d'étudier les sites (ou les théories géométriques ou autres objets susceptibles de présenter les topos) à travers les topos !

Les choix de cette école reposent en fait sur un parti pris refusant à la fois les constructions infinitaires et celles d'ordre supérieur. Or, le concept de topos de Grothendieck est à la fois infinitaire (car, d'une part, les topos sont présentés par des *ensembles en général infinis* de générateurs, ce qui fait qu'ils n'admettent pas une axiomatisation finitaire dans le langage des catégories, et d'autre part car ils se prêtent naturellement à des opérations infinitaires comme les colimites arbitraires), et d'ordre supérieur (du fait que le concept de site est du deuxième ordre).

On peut trouver de nombreuses illustrations de ce parti pris dans les travaux mathématiques de cette école. Par exemple, dans [Johnstone 2002] sont démontrées plusieurs « caractérisations en termes de sites » pour des propriétés invariantes de topos qui ont la forme : « un topos satisfait l'invariant si et seulement si *il existe* un site de définition de ce topos avec telle ou telle propriété » (comme si le site en lui-même n'avait pas d'importance), alors que, comme on le verra dans la prochaine section, ce dont on a besoin pour construire des « ponts » sont des caractérisations de la forme « un topos $\mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J)$ satisfait l'invariant si et seulement si le site $(\mathscr{C}, J)$ satisfait telle ou telle propriété » car on a besoin d'aller à la fois des sites vers les topos et réciproquement (autrement dit, de « monter » du site vers le topos via l'une des arches du pont et de « redescendre » de l'autre côté en parcourant l'autre arche).

Le refus des constructions d'ordre supérieur dans cette école s'est manifesté également dans leurs tentatives de développement d'une théorie des topos relatifs en utilisant le concept (très rigide) de catégorie interne à un topos, alors que la bonne notion (à la fois d'un point de vue géométrique et du point de vue des catégories supérieures) est celle de *champ* sur un topos, comme Grothendieck et Giraud l'avaient déjà compris : il suffit de penser que le champ canonique sur un topos, qui est le concept central autour duquel toute la théorie relative devrait être développée, *n'est pas* une catégorie interne ! (14) Ils ont également négligé la notion de *site fibré* introduite dans [SGA 4a 1972] (voir l'exposé VI), qui, une fois convenablement généralisée, donne lieu à une théorie beaucoup plus vaste et flexible que les formalismes fondés sur leur notion de site interne.

De façon surprenante, certains des promoteurs de cette école se sont même revendiqués de Grothendieck pour justifier leur parti pris, en interprétant les passages suivants de Grothendieck (qui se trouvent respectivement dans la préface à la deuxième édition de SGA 4 et dans l'introduction à l'exposé IV de ce livre) comme une reconnaissance du caractère inessentiel des sites (dans le livre [Krömer 2007], qui présente ces développements, on trouve même une tête de section appelée « The topos is more important than the site » !) :

(14) Il est vrai que tout champ est équivalent (mais pas nécessairement isomorphe) à un champ scindé, c'est-à-dire à une catégorie interne, mais ce procédé de rigidification est fondé sur des choix (pour définir l'un des foncteurs qui définissent l'équivalence) et il n'est pas commode dans la pratique.

> Notre principe directeur a été de développer un langage et des notations qui soient ceux qui servent déjà effectivement dans les diverses applications, de sorte à ne pas perdre contact avec le contenu « géométrique » (ou « topologique ») des divers foncteurs qu'on est amené à considérer entre sites. Pour ceci, les notions de topos et de morphisme de topos semblent être le fil conducteur indispensable, et il convient de leur donner la place centrale, la notion de site devenant une notion technique auxiliaire.

> D'un autre côté, l'expérience a enseigné qu'il y a lieu de considérer diverses situations en Mathématique surtout comme un moyen technique pour construire les catégories de faisceaux (d'ensembles) correspondantes, *i.e.* les « topos » correspondants. Il apparaît que toutes les notions vraiment importantes liées à un site [...] s'expriment en fait directement en termes du topos associé...

Il est vrai que Grothendieck n'a jamais parlé de « ponts » ou de dualités entre le niveau des sites et celui des topos. Toutefois, dans son école il n'était même pas concevable d'étudier des topos indépendamment de leurs présentations (autrement dit, des objets à partir desquels ils étaient construits), étant donné que la géométrie des situations considérées était toujours incarnée par des sites associés à des schémas.

À cet égard, l'introduction du livre « Topos Theory » de P. Johnstone, dont le thème et l'inspiration principaux sont la théorie des topos élémentaires, est particulièrement éclairante : en elle, Johnstone parle notamment de « l'inutilité fondamentale » du théorème d'existence des topos classifiants (!), se plaint que « toute la portée de la maxime « le topos est plus important que le site » semble n'avoir jamais été appréciée par l'école de Grothendieck » et conclut que, contrairement à Grothendieck, il ne « voit pas la théorie des topos comme une machine pour la démolition de problèmes non résolus en géométrie algébrique ou ailleurs ».

En même temps, Grothendieck reproche aux géomètres à la fois d'avoir abandonné les topos et d'en avoir fait un sujet mal considéré dans le monde mathématique :

> Depuis bientôt quinze ans, cela fait partie du bon ton dans le « grand monde », de regarder de haut celui qui s'aviserait de prononcer le mot « topos », à moins que ce ne soit pour plaisanter ou qu'il n'ait l'excuse d'être logicien. (Ce sont là gens connus pour être pas comme les autres et auxquels il faut pardonner certaines lubies...)

À ce propos, je me rappelle encore la recommandation que je reçus il y a quelques années, quand j'étais encore post-doc, de la part d'un géomètre algébriste connu, ancien élève de Grothendieck, d'enlever le mot « topos » de tous mes articles pour le remplacer par l'expression, à son avis plus acceptable dans sa communauté, de « catégorie de faisceaux sur un site » ! Inutile de dire que je n'ai pas suivi ce conseil ; cela aurait été absurde compte-tenu du rôle central que joue dans mes travaux la nature *invariante* du concept de topos (par rapport à des sites de présentation différents).

De façon remarquable, il a manqué dans une école comme dans l'autre une intégration entre le niveau « concret » des sites et celui « abstrait » ou « métamathématique » des topos, intégration qui est, comme nous le verrons plus en détail dans la prochaine section, la condition essentielle pour une utilisation féconde des topos comme espaces unifiants en mathématiques. Cela demande en effet de travailler *à deux niveaux*, qu'il ne faut ni confondre ni couper l'un de l'autre. Ces deux niveaux jouent en effet des rôles fondamentalement différents : celui des topos est le niveau de l'*unité*, où vivent les invariants, tandis que celui des sites (ou plus généralement des présentations des topos) est le niveau de la *diversité*, où se déploie la variabilité des formes dans lesquelles un invariant donné s'incarne.

9 — Les topos comme « ponts » : vision sous-jacente et quelques exemples

Depuis mes études de doctorat je me suis attachée à élaborer une théorie et des techniques qui permettent d'utiliser les topos comme « ponts » unifiants entre théories ou contextes mathématiques différents. Rappelons que chez Grothendieck le mot « unification » a le sens que l'on peut associer le même type d'objet — un topos — à des situations mathématiques *a priori* très différentes. Grothendieck ne parle pas de '*ponts*' ou de *transferts* de connaissance entre différentes théories qui seraient rendus possibles par les topos. Cependant, cette nouvelle perspective des topos comme « ponts » nous semble constituer un prolongement naturel de la conception métamathématique que Grothendieck avait des topos.

La théorie des « ponts » topos-théoriques, introduite dans le texte programmatique [Caramello 2010], permet d'exploiter la flexibilité technique inhérente à la notion de topos — plus précisément la possibilité de représenter les topos d'une multitude de façons différentes — pour construire des « ponts » unifiants entre différentes théories mathématiques ayant des contenus sémantiques équivalents ou étroitement reliés.

Ces dernières années, en plus de conduire à la résolution de problèmes ouverts depuis longtemps en logique catégorique, ces techniques générales ont engendré plusieurs applications non triviales dans différents secteurs des mathématiques, et le potentiel de cette théorie a juste commencé d'être exploité.

En fait, ces « ponts » se révèlent utiles non seulement pour *relier* entre elles des théories mathématiques différentes mais aussi pour *étudier* une théorie donnée à l'intérieur d'un domaine spécifique.

À titre d'illustration du champ d'application potentiel de cette théorie, voici une liste non exhaustive de domaines mathématiques dans lesquels elle a permis d'obtenir des résultats substantiels :

- *Théorie des modèles* (interprétation et généralisation topos-théorique du théorème de Fraïssé).
- *Théorie de la démonstration* (nouveaux systèmes déductifs pour les théories géométriques).
- *Algèbre* (généralisation topos-théorique du formalisme Galoisien).
- *Topologie* (réinterprétation et engendrement de dualités de types de Stone et de Priestley).
- *Analyse fonctionnelle* (résultats sur les spectres de Gelfand et les compactifications de Wallman).
- *Groupes réticulés et MV-algèbres* (travaux avec A. C. Russo).
- *Structures cycliques* introduites par A. Connes et C. Consani (travail sur les « théories cycliques » avec N. Wentzlaff).
- *Géométrie algébrique* (généralisation des motifs de Nori avec L. Barbieri-Viale et L. Lafforgue, et approche logique des problèmes d'indépendance de ℓ de la cohomologie ℓ-adique).

Pour une présentation conceptuelle de ces résultats, ainsi que d'autres, le lecteur est renvoyé à [Caramello 2016a]. Les principes généraux de la théorie des topos comme « ponts » se trouvent aussi présentés dans le chapitre 2 de [Caramello 2018].

10 — Les principes « clés »

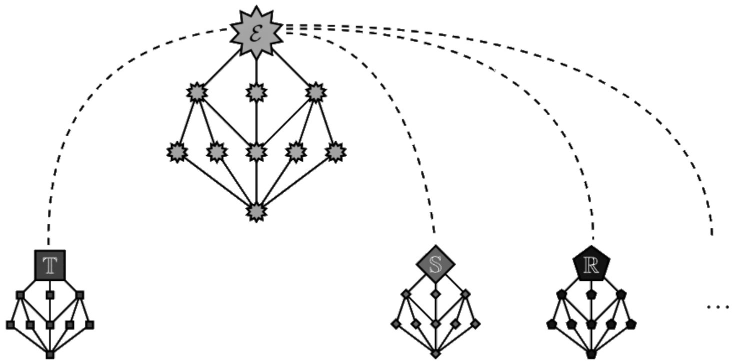
La théorie des topos comme « ponts » repose sur une vision méta-mathématique des topos, dont nous pouvons résumer les principes clés de la façon suivante :

- La notion d'équivalence de Morita est omniprésente en mathématiques ; en effet, elle formalise dans beaucoup de situations le sentiment de « regarder la même chose de différentes manières » ou de « construire un même objet mathématique par des méthodes différentes ».
- En fait, plusieurs dualités et équivalences importantes en mathématiques peuvent s'interpréter naturellement en termes d'équivalences de Morita (voir par exemple mes travaux sur les dualités de type de Stone et pour les MV-algèbres).
- D'autre part, la théorie des topos est en elle-même une source primordiale d'équivalences de Morita. En effet, les différentes représentations d'un même topos peuvent être interprétées comme des équivalences de Morita entre différentes théories.
- Deux théories *bi-interprétables* (c'est-à-dire dont les catégories syntactiques cohérentes ou géométriques sont équivalentes) sont Morita-équivalentes mais, très remarquablement, la réciproque n'est pas vraie (voir, par exemple, mes travaux sur les MV-algèbres). En fait, la plupart des équivalences de Morita ne se réduisent pas à des bi-interprétations, ni même à des interprétations d'une théorie dans l'autre ; il faut enrichir ces catégories syntactiques avec des *imaginaires* au sens de la théorie des modèles (ce qui revient à construire leurs topos ou prétopos classifiants), pour arriver à une équivalence de catégories. Cela signifie que la plupart des correspondances (susceptibles d'être établies) en mathématiques sont invisibles d'un point de vue concret, car elles ne sont pas induites par des « dictionnaires ».
- De plus, la notion d'équivalence de Morita saisit le *dynamisme* intrinsèque inhérent à la notion de théorie mathématique ; en effet, une théorie mathématique donne lieu *par elle-même* à une infinité d'équivalences de Morita, grâce aux différents points de vue que l'on peut avoir sur elle. Par exemple, chaque façon de représenter une théorie $\mathbb{T}$ comme un quotient (c'est-à-dire une extension géométrique dans le même langage) d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$, donne lieu à une représentation de son topos classifiant en termes de celui de $\mathbb{T}$ (voir le théorème de dualité entre quotients et sous-topos dans le chapitre 2 de [Caramello 2018]).

- L'existence de différentes théories ayant le même topos classifiant se traduit, au niveau technique, par l'existence de différentes présentations (en particulier, de différents sites de définition) d'un même topos.
- Des *invariants* des topos peuvent donc être utilisés pour transférer des informations d'une théorie à une autre :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{E}_{\mathbb{T}} \simeq \mathscr{E}_{\mathbb{T}'} \arrow[dr, dashed, bend left] & \\
\mathbb{T} \arrow[ur, dashed, bend left] & & \mathbb{T}'
\end{tikzcd}$$

- Les *transferts d'information* se réalisent en exprimant un invariant donné en termes des différentes représentations du topos. Chaque invariant se comporte dans ce contexte comme une « paire de lunettes spéciale » qui permet de discerner de l'information cachée dans l'équivalence de Morita considérée. Différents invariants permettent de transférer différentes informations.
- Ainsi, des propriétés (resp. constructions) différentes considérées dans le contexte de théories classifiées par un même topos apparaissent comme des *manifestations* différentes d'une *unique* propriété (resp. construction) définie au niveau des topos.
- Le *niveau de généralité* des invariants topos-théoriques est idéal pour saisir beaucoup d'aspects importants des théories mathématiques. En effet, des invariants du topos classifiant $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$ d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$ se traduisent dans des propriétés logiques (syntactiques ou sémantiques) intéressantes de $\mathbb{T}$.
- Le fait que des invariants des topos se spécialisent souvent en des propriétés ou constructions importantes, ayant un intérêt mathématique naturel, est une indication claire de la *centralité* de ces concepts en mathématiques. En fait, tout ce qui se passe au niveau des topos a des ramifications « uniformes » à travers les mathématiques. Par exemple, la figure suivante représente la structure de treillis sur la collection des sous-topos d'un topos $\mathscr{E}$ qui induit des structures de treillis sur les collections de « quotients » de théories géométriques $\mathbb{T}$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{R}$ classifiées par $\mathscr{E}$:



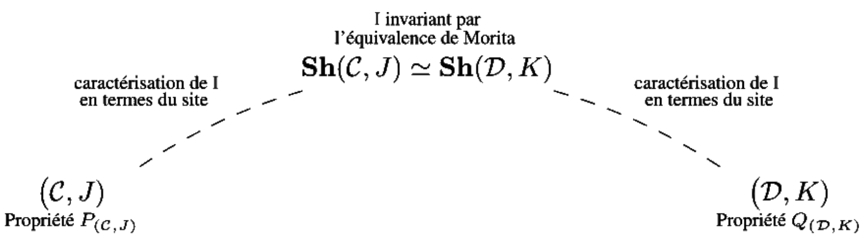
Une des raisons de l'efficacité de la technique des « ponts » topos-théoriques est que la relation entre un topos et ses différentes présentations est *très naturelle*, ce qui permet de transférer (souvent aisément mais non trivialement) des invariants entre différentes présentations (et donc entre différentes théories). En fait, le degré de complexité de ces « traductions » varie énormément d'un invariant à l'autre : il existe de larges classes d'invariants pour lesquels on peut établir des caractérisations, en termes de sites ou d'autres présentations, de façon essentiellement automatique, alors que pour d'autres invariants, notamment ceux cohomologiques, les calculs peuvent être très difficiles même dans des cas particuliers. En même temps, cette méthode est susceptible d'engendrer des résultats profonds et surprenants, car un invariant donné peut se manifester de façons très différentes dans le contexte de différentes présentations. En fait, on assiste à une sorte de *morphogenèse mathématique*, résultant de l'expression d'invariants en termes de présentations différentes des topos. Par la considération d'invariants différents dans le contexte d'une même équivalence de topos, la méthode des « ponts » permet d'engendrer une pluie de résultats autour d'un thème donné (exprimé par cette équivalence). Cette façon de faire des mathématiques est donc caractérisée par une très grande *continuité* et *modularité*. En effet, d'une part, la généralité de la méthode permet d'*adapter* ou *transporter* des notions, techniques et résultats d'un contexte à un autre ; d'autre part, l'étude des invariants des topos permet d'identifier, dans des contextes mathématiques concrets, les « bonnes notions », c'est-à-dire les notions qui correspondent à des invariants de topos (via leurs caractérisations en termes de sites ou d'autres présentations) et admettent donc une infinité de reformulations équivalentes dans d'autres contextes mathématiques.

Un « pont » topos-théorique est une structure à deux niveaux, celui « concret » des sites ou plus généralement des objets susceptibles de présenter les topos, et celui « abstrait » des topos ; les caractérisations d'invariants des topos en termes de leurs présentations forment les « arches » du « pont ». Schématiquement, un « pont » typique a la forme suivante :

- *Tabliers* des « ponts » : *équivalences de Morita* (ou plus généralement morphismes de topos ou autres types de relations entre eux).
- *Arches* des « ponts » : *Caractérisation en termes de sites* (ou plus généralement expression d'invariants des topos en termes de leurs différentes représentations).

Les expressions différentes d'un même invariant dans le contexte de présentations différentes d'un même topos se trouvent logiquement liées par le « pont ». Ainsi, on arrive à mettre en relation des propriétés « concrètes » différentes par le biais d'invariants de topos. Notons que les topos (et leurs invariants) n'apparaissent plus dans la formulation finale de cette relation logique, ayant pourtant joué un rôle crucial pour la découvrir. Cela constitue une illustration de la nécessité de faire un « saut » dans l'« imaginaire » (contexte dans lequel les symétries se manifestent naturellement, autrement dit où « vivent » les invariants) pour arriver à lier entre elles des entités « réelles », ainsi que pour avoir une compréhension plus globale du phénomène que l'on souhaite étudier et s'offrir des meilleurs opportunités de calcul.

Par exemple, dans le « pont » suivant, nous avons une propriété invariante I et des équivalences logiques « $\mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J)$ satisfait I si et seulement si le site $(\mathscr{C}, J)$ satisfait la propriété $P_{(\mathscr{C},J)}$ » et « $\mathbf{Sh}(\mathscr{D}, K)$ satisfait I si et seulement si le site $(\mathscr{D}, K)$ satisfait la propriété $Q_{(\mathscr{D},K)}$ », qui constituent les arches du « pont » et qui permettent de conclure l'équivalence entre $P_{(\mathscr{C},J)}$ et $Q_{(\mathscr{D},K)}$. Notons que ces deux propriétés sont unifiées par ce « pont » car interprétées comme des *manifestations* d'une *unique* propriété I définie au niveau des topos :



11 — Quelques exemples de « ponts »

À titre d'illustration de l'application de la technique des topos comme « ponts », discutons brièvement quelques exemples :

- Théories de type préfaisceau.
- Théorème de Fraïssé topos-théorique.
- Théorie de Galois topologique.
- Dualités de type de Stone.

En fait, les résultats obtenus dans chacun de ces sujets sont complètement *différents*, alors que la méthodologie sous-jacente est toujours la *même* !

Théories de type préfaisceau

Rappelons qu'une théorie géométrique est dite *de type préfaisceau* si elle est classifiée par un topos de préfaisceaux.

Les théories de type préfaisceau sont très importantes car elles constituent les « briques de base » à partir desquelles toute théorie géométrique peut être construite. En effet, comme tout topos de Grothendieck s'écrit comme sous-topos de topos de préfaisceaux, toute théorie géométrique peut s'écrire comme « quotient » de théories de type préfaisceau.

Toute théorie algébrique finitaire (ou, plus généralement, cartésienne) est de type préfaisceau, mais la classe des théories de ce type contient beaucoup d'autres théories mathématiques intéressantes (voir, par exemple, le chapitre 9 de [Caramello 2018]).

Toute théorie $\mathbb{T}$ de type préfaisceau possède deux représentations naturelles différentes de son topos classifiant, qui peuvent être utilisées pour construire des « ponts » reliant sa *syntaxe* et sa *sémantique* :

$$\begin{tikzcd}
 & {[\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set}), \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})} \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\
\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}} & & (\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})
\end{tikzcd}$$

Ici, f.p.$\mathbb{T}$-mod$(\mathbf{Set})$ est la catégorie des modèles finiment présentables de $\mathbb{T}$ et $(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$ est le site syntactique géométrique de $\mathbb{T}$.

Considérons, par exemple, dans le contexte d'une théorie de type préfaisceau $\mathbb{T}$, que nous supposons par souci de simplicité avoir une seule sorte, l'invariant de topos donné par la notion de sous-objet du produit $U \times \cdots \times U$ (n fois) du modèle universel U de $\mathbb{T}$. Cet invariant s'exprime, du côté de la représentation $\mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$ du topos classifiant de $\mathbb{T}$, comme la notion de formule géométrique en n variables considérée à équivalence $\mathbb{T}$-démontrable près, et, du côté de la représentation [f.p.$\mathbb{T}$-mod($\mathbf{Set}$), $\mathbf{Set}$], comme la notion de propriété fonctorielle de n-uplets d'éléments de modèles M de $\mathbb{T}$ de présentation finie :

Sous-objet de $U\times\cdots\times U$

$[\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set}), \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$

$\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}$ — $(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$

Correspondance fonctorielle $M \to R_M \subseteq M\times\cdots\times M$ — Formule géométrique $\phi(x_1,\ldots,x_n)$

Ce « pont » conduit donc au théorème de définissabilité suivant :

Théorème. *Soit* $\mathbb{T}$ *une théorie de type préfaisceau. Supposons qu'il nous soit donné, pour tout modèle ensembliste finiment présentable* $\mathscr{M}$ *de* $\mathbb{T}$*, un sous-ensemble* $R_{\mathscr{M}}$ *de* $\mathscr{M}^n$ *de telle façon que tout homomorphisme de* $\mathbb{T}$*-modèles* $h : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ *envoie* $R_{\mathscr{M}}$ *dans* $R_{\mathscr{N}}$*. Alors il existe une formule géométrique* $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *qui, pour tout* $\mathbb{T}$*-modèle finiment présentable* $\mathscr{M}$*, définisse le sous-ensemble* $R_{\mathscr{M}}$*.*

Bien sûr, la considération d'autres invariants permet d'obtenir beaucoup d'autres résultats intéressants sur les théories de type préfaisceau (pour cela, le lecteur est renvoyé à [Caramello 2018]).

Théorème de Fraïssé topos-théorique

Montrons maintenant que le théorème de Fraïssé en théorie des modèles admet une généralisation substantielle découlant d'un triple « pont ».

Notons d'abord que, dans le contexte des théories de type préfaisceau, on peut introduire une notion de modèle homogène qui généralise celle de modèle faiblement homogène de la théorie des modèles classique :

Définition. *Un modèle ensembliste* M *d'une théorie géométrique* $\mathbb{T}$ *est dit* homogène *si pour toute flèche* $f : c \to d$ *dans* f.p.$\mathbb{T}$-mod($\mathbf{Set}$) *et toute flèche* $y : c \to M$ *dans* $\mathbb{T}$-mod($\mathbf{Set}$)*, il existe une flèche* $u : d \to M$ *dans* $\mathbb{T}$-mod($\mathbf{Set}$) *telle que* $u \circ f = y$ *:*

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "y"] \arrow[d, "f"'] & M \\ d \arrow[ur, dashed, "u"'] & \end{tikzcd}$$

On peut aussi définir, dans le cadre des catégories, les propriétés d'amalgamation (AP) et de plongement conjoint (JEP) : on dira qu'une catégorie satisfait AP si toute paire de flèches de même domaine peut être complétée en un carré commutatif, et qu'elle satisfait JEP si deux objets quelconques admettent une flèche vers un troisième objet.

Or, les invariants définis par les propriétés des topos d'être *bivalents* ou *atomiques*, et la notion invariante de *point* d'un topos donnent lieu chacun à un « pont » différent dont le tablier est la même équivalence de Morita :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \begin{array}{c}\text{Topos atomique}\\ \mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{\text{at}}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})\end{array} \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\
\begin{array}{c}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{\text{at}})\\ \text{Site atomique i.e.}\\ \text{AP sur f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})\end{array} & & \begin{array}{c}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})\\ \text{Atomicité de } \mathbb{T}'\end{array}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \begin{array}{c}\text{Topos bivalent}\\ \mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{\text{at}}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})\end{array} \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\
\begin{array}{c}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{\text{at}})\\ \text{JEP sur f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})\end{array} & & \begin{array}{c}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})\\ \text{Complétude de } \mathbb{T}'\end{array}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \begin{array}{c}\text{Point de}\\ \mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{\text{at}}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})\end{array} \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\
\begin{array}{c}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{\text{at}})\\ \mathbb{T}\text{-modèle homogène dans } \mathbf{Set}\end{array} & & \begin{array}{c}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})\\ \mathbb{T}'\text{-modèle dans } \mathbf{Set}\end{array}
\end{tikzcd}$$

Mettant ces trois « ponts » ensemble, on obtient le théorème suivant (tiré de [Caramello 2014]), qui constitue une ample généralisation du théorème classique de Fraïssé (qui est son cas particulier où $\mathbb{T}$ est le quotient de la théorie vide sur un langage fini correspondant à une collection uniformément finie de modèles de présentation finie de cette théorie qui satisfait la propriété d'hérédité) :

Théorème. *Soit* $\mathbb{T}$ *une théorie de type préfaisceau telle que la catégorie* f.p.$\mathbb{T}$-mod($\mathbf{Set}$) *soit non-vide et satisfasse AP. Alors la théorie* $\mathbb{T}'$ *des* $\mathbb{T}$*-modèles homogènes est atomique, et elle est complète si et seulement si* f.p.$\mathbb{T}$-mod($\mathbf{Set}$) *satisfait JEP.*

Le niveau de généralité de cette interprétation topos-théorique du théorème de Fraïssé est assez grande pour permettre d'unifier la théorie de Fraïssé et celle de Galois, comme nous l'expliquons dans la section suivante.

Il est intéressant de remarquer que la considération de ces *trois* invariants dans le contexte de l'équivalence

$$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{\text{at}}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$$

nous a permis de retrouver et améliorer le théorème de Fraïssé ; toutefois, il existe une infinité d'invariants de topos, que nous pouvons considérer en relation avec cette même équivalence ! Cela permet d'engendrer d'autres résultats, apparentés au théorème de Fraïssé mais en général indépendants de celui-ci et indépendants les uns des autres (des exemples de tels résultats sont donnés dans [Caramello 2014]). Cela illustre comment la méthode des « ponts » engendre naturellement des *familles de résultats* autour d'un thème donné.

Théorie de Galois topologique

Avant de présenter notre interprétation topos-théorique de la théorie de Galois, il faut introduire les notions catégoriques suivantes :

Définition. *Soit* $\mathbb{T}$ *une théorie de type préfaisceau. Un modèle ensembliste* M *de* $\mathbb{T}$ *est dit* f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**)*-universel si tout modèle de présentation finie de* $\mathbb{T}$ *admet un homomorphisme vers* M*, et il est dit* f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**)*-ultrahomogène si toutes les flèches d'un modèle de présentation finie de* $\mathbb{T}$ *vers* M *peuvent être transformées l'une dans l'autre par un automorphisme de* M*.*

Le théorème de représentation suivant (tiré de [Caramello 2016b]) fournit le tablier des « ponts » qui nous serviront pour engendrer des théories de Galois concrètes :

Théorème. *Soit* $\mathbb{T}$ *une théorie de type préfaisceau telle que la catégorie* f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**) *des modèles finiment présentables satisfasse AP et JEP, et soit* M *un modèle* f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**)*-universel et* f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**)*-ultrahomogène de* $\mathbb{T}$*. Alors on a une équivalence de topos*

$$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{\text{at}}) \simeq \mathbf{Cont}(\text{Aut}(M)),$$

où le groupe $\text{Aut}(M)$ *d'automorphismes de* M *est muni de la topologie de la convergence point par point. Cette équivalence est induite par le foncteur*

$$F : \text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}} \to \mathbf{Cont}(\text{Aut}(M))$$

qui envoie tout modèle c *de* f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**) *sur l'ensemble* $Hom_{\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})}(c, M)$ *(muni de l'action évidente de* $\text{Aut}(M)$*) et toute flèche* $f : c \to d$ *dans* f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**) *sur l'application* $\text{Aut}(M)$*-équivariante*

$$- \circ f : Hom_{\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})}(d, M) \to Hom_{\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})}(c, M)\ .$$

Notons que le foncteur F prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine $\mathbf{Cont}_t(\mathrm{Aut}(M))$ de $\mathbf{Cont}(\mathrm{Aut}(M))$ sur les actions transitives et non vides (qui est la catégorie des atomes du topos $\mathbf{Cont}(\mathrm{Aut}(M)))$, mais il n'est pas nécessairement une équivalence vers cette catégorie, ni forcément plein et fidèle.

Le résultat suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que F soit plein et fidèle (resp. une équivalence vers $\mathbf{Cont}_t(\mathrm{Aut}(M)))$.

Théorème. *Sous les hypothèses du dernier théorème, le foncteur F est pleinement fidèle si et seulement si toute flèche de* $\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ *est un monomorphisme strict, et c'est une équivalence sur la sous-catégorie* $\mathbf{Cont}_t(\mathrm{Aut}(M))$ *de* $\mathbf{Cont}(\mathrm{Aut}(M))$ *si et seulement si de plus* $\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ *est atomiquement complète.*

Ce résultat découle de deux « ponts », lesquels sont obtenus en considérant les notions invariantes d'*atome* et de *flèche entre des atomes* :

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & \mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\mathrm{op}}, J_{\mathrm{at}}) \simeq \mathbf{Cont}(\mathrm{Aut}(M)) \arrow[dl, dashed, no head] \arrow[dr, dashed, no head] & \\
\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\mathrm{op}} & & \mathbf{Cont}_t(\mathrm{Aut}(M))
\end{tikzcd}$$

En effet, une catégorie $\mathscr{C}$ dont l'opposée satisfait AP est dite atomiquement complète si tous les atomes du topos $\mathbf{Sh}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, J_{\mathrm{at}})$ sont isomorphes à un objet de la forme $l(c)$ pour un objet c de $\mathscr{C}$ (où l est le foncteur canonique $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sh}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, J_{\mathrm{at}})$). Cette condition admet une caractérisation élémentaire dans le langage des catégories.

Ce théorème généralise la théorie des catégories galoisiennes de Grothendieck et peut s'appliquer pour obtenir des théories de type galoisien dans différents domaines des mathématiques, par exemple celui des groupes finis et celui des graphes finis.

Le lecteur aura sans doute remarqué que les topos qui interviennent dans la théorie de Fraïssé sont précisément les topos atomiques et bivalents, qui sont aussi les topos impliqués dans notre interprétation de la théorie de Galois. En fait, la théorie de Galois consiste à étudier ces topos du point de vue de la théorie des groupes, en les représentant comme des catégories d'actions continues de groupes topologiques sur des ensembles discrets, alors que la théorie de Fraïssé consiste à les étudier d'un point de vue syntactique. Pour plus de détails sur ces résultats et l'unification entre la théorie de Fraïssé et celle de Galois, on renvoie le lecteur à [Caramello 2016b].

Dualités de type de Stone

Dans [CARAMELLO 2011] on montre que toutes les dualités ou équivalences de type de Stone entre des sortes particulières de préordres, de locales ou d'espaces topologiques peuvent être obtenues en *fonctorialisant* des « ponts » de la forme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J_{\mathscr{C}}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{D}, K_{\mathscr{D}}) & \\ \mathscr{C} \arrow[ur, dashed, no head] & & \mathscr{D} \arrow[ul, dashed, no head] \end{tikzcd}$$

où $\mathscr{D}$ est une sous-catégorie $J_{\mathscr{C}}$-dense d'une catégorie $\mathscr{C}$ définie par un préordre. Ces équivalences sont notamment fournies par le *lemme de comparaison* de Grothendieck. Par exemple, on peut prendre pour $\mathscr{D}$ une algèbre de Boole et pour $\mathscr{C}$ le treillis des ouverts de son espace de Stone pour la *dualité de Stone*, ou bien pour $\mathscr{C}$ une algèbre de Boole atomique complète et pour $\mathscr{D}$ la collection de ses atomes pour la *dualité de Lindenbaum-Tarski*.

Cette méthode permet d'engendrer beaucoup de nouvelles dualités pour d'autres sortes de structures préordonnées (par exemple, une dualité localique pour les semi-treillis d'intersection, une dualité pour les k-repères, une dualité pour les treillis disjointement distributifs, une dualité pour les prérepères engendrés par leurs éléments directement irréductibles, etc.). Elle se généralise aussi naturellement au cadre des catégories arbitraires.

Ce travail illustre notamment l'approche des dualités par la théorie des « ponts » : pour mettre en relation deux objets, plutôt qu'essayer de trouver des catégories dans lesquelles ils puissent être insérés et chercher ensuite à construire des adjonctions ou équivalences entre elles (par exemple à l'aide de foncteurs Hom vers un objet « schizophrène », comme dans l'approche catégorique classique), on se concentre sur les deux objets et on cherche à incarner leurs invariants communs par un même topos associé à chacun d'eux. On a donc un « pont » pour chaque paire d'objets et la considération de différents morphismes entre les topos associés fournit différentes manières de « fonctorialiser » ces « ponts » et donc d'obtenir des équivalences entre des catégories contenant ces deux objets. Notons toutefois que l'identification de ces catégories n'est pas donnée *a priori* (comme dans l'approche catégorique classique) ; elle *résulte* des « ponts » induits par des notions invariantes de morphismes de topos.

D'autre part, l'approche classique des catégoriciens repose sur un principe de continuité qui, bien qu'intuitivement plausible, risque de noyer la spécificité des objets en question dans l'abstraction des catégories dans lesquelles on décide de les considérer, alors que le fait d'associer à chaque objet un topos incarnant son « essence » (pour utiliser la terminologie grothendieckienne) est susceptible de valoriser la diversité des objets individuels d'une façon beaucoup plus profonde. C'est un peu comme si on demandait, pour que deux individus puissent se marier, que se « marient » aussi les familles ou les clubs auxquels ils appartiendraient ; cela pourrait être souhaité par certains, mais il y a peu de doute qu'il s'agisse d'une condition trop restrictive !

Un autre aspect intéressant de cette approche est qu'elle produit une véritable *machine à engendrer des dualités* permettant, d'une part, de retrouver les différentes dualités classiques, et, d'autre part, d'en obtenir beaucoup de nouvelles. Remarquablement, grâce à ce point de vue unifiant, on arrive à comprendre pourquoi certaines dualités avaient été découvertes alors que d'autres étaient restées cachées, alors qu'elles ont le même niveau de « profondeur » mathématique, étant engendrées par la même « machine » : souvent, la raison en réside dans la complexité linguistique de leur description, qui peut varier significativement d'une dualité à une autre, si bien que l'intuition humaine peut suffire à établir les plus simples (mais pas les autres) en l'absence d'une théorie générale. Plusieurs illustrations de cette remarque sont données dans [Caramello 2011].

12 — Perspectives futures

Les résultats obtenus jusqu'à présent montrent que les topos peuvent jouer efficacement le rôle d'*espaces unifiants* pour transférer de l'information entre théories mathématiques différentes et engendrer de nouvelles équivalences, dualités et correspondances à travers divers secteurs des mathématiques.

Les topos ont en effet un véritable *pouvoir créateur* en mathématiques, au sens que leur étude engendre naturellement, et dans des contextes mathématiques les plus divers, un grand nombre de notions et résultats « concrets » qui sont pertinents mais souvent insoupçonnés.

Dans les prochaines années, nous comptons poursuivre la recherche à la fois sur le plan théorique et sur le plan appliqué pour continuer à développer le potentiel des topos comme outils fondamentaux dans l'étude des théories mathématiques et de leurs relations, et comme concept « clé » définissant une nouvelle manière de faire des mathématiques susceptible d'apporter un éclairage unique sur un grand nombre de sujets différents.

Des thèmes centraux dans notre programme de recherche seront :

- étudier des dualités ou des correspondances importantes en mathématiques d'un point de vue topos-théorique (en particulier, la théorie des motifs, la théorie du corps de classes et le programme de Langlands) ;
- étudier systématiquement des expressions des invariants topos-théoriques en termes de différentes présentations des topos, et définir de nouveaux invariants qui saisissent des aspects importants de problèmes mathématiques concrets ;
- interpréter et généraliser des parties importantes de la théorie des modèles (à la fois classique et moderne) en termes de topos, et développer une théorie fonctorielle des modèles ;
- introduire de nouvelles méthodologies pour engendrer des équivalences de Morita ;
- développer des techniques générales pour construire des *spectres* en utilisant les topos classifiants ;
- généraliser la technique des « ponts » au contexte des catégories et topos supérieurs en élaborant une logique géométrique d'ordre supérieur ;
- développer une théorie des topos classifiants au dessus de topos arbitraires et des *techniques de relativisation* de concepts et résultats.

Grâce au développement de ce programme, l'étude topos-théorique des théories mathématiques devrait devenir de plus en plus « *user-friendly* » et donc aisément applicable non seulement en mathématiques mais aussi à l'investigation de problèmes fondamentaux dans d'autres sciences, tout particulièrement en physique théorique et en informatique. Il serait intéressant, par exemple, d'étudier si la théorie de la relativité et la mécanique quantique pourraient être unifiées à travers l'identification de topos communs associés à l'une et à l'autre théorie (qui seraient donc construits à partir des sites de nature analytique dans le premier cas ou d'objets relevant de la théorie des algèbres d'opérateurs ou de la géométrie non-commutative comme des C^*-algèbres ou quantales/quantaloïdes dans le deuxième cas). Un autre sujet naturel d'étude pour une éventuelle interprétation topos-théorique serait celui des dualités importantes en physique comme la correspondance AdS/CFT et la symétrie miroir. (15)

(15) Je remercie Laurent Lafforgue, Alain Connes et Denise Chemla pour leur relecture d'une version préliminaire de ce texte et leurs commentaires et conseils de rédaction en français.